מרצה: מיכאל מגרל megereli@math.biu.ac.il אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 6

משפט (תורשתיות של רציפות): $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{matrix} A \xrightarrow{f_0} B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}}$ גם רציפה.

הוכחה:

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$f_0^{-1}(O \cap B) = \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A$$
$$= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X\text{–פתוחה ב} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב A (תת מרחב).

☺

שאלה כללית: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל : ספרביליות , קשירות,

קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...

(פונקציה **רציפה על** $f: X \to Y = f(X)$)

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f: X \to Y$ רציפה <u>על</u>, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $|A| \le \aleph_0$, $\bar{A} = X$.

אז $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \le \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $(X_1,\tau_1) \xrightarrow{f} (X_2,\tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism   *אזהרה: זה לא Homomorphism*)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על   (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

ב) f רציפה.

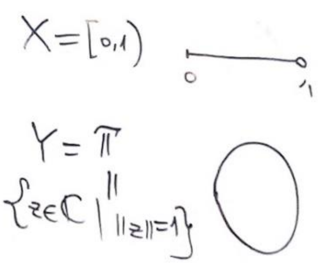
ג) f^{-1} רציפה.

הערה: $\begin{cases} (\text{א}) \\ (\text{ב}) \end{cases} \not\Rightarrow (\text{ג})$ אפילו במקרים טבעיים.

דוגמה 1: $f^{-1} : (\mathbb{R},\tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f = id : \mathbb{R} \to (\mathbb{R},\tau_{discr})$

$\{0\} \in \tau_{discr}$ אבל $\{0\} \notin \tau$ $f^{-1}(0) = \{0\}$.

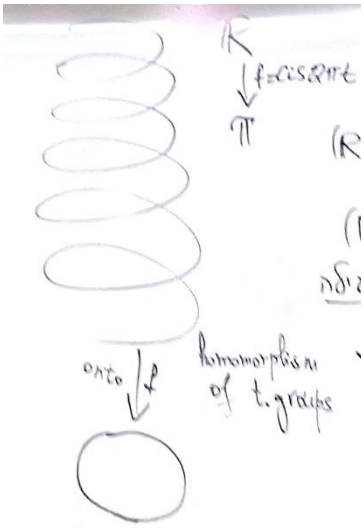
דוגמה 2: (גיאומטרית) $f : [0,1) \to \mathbb{T}$

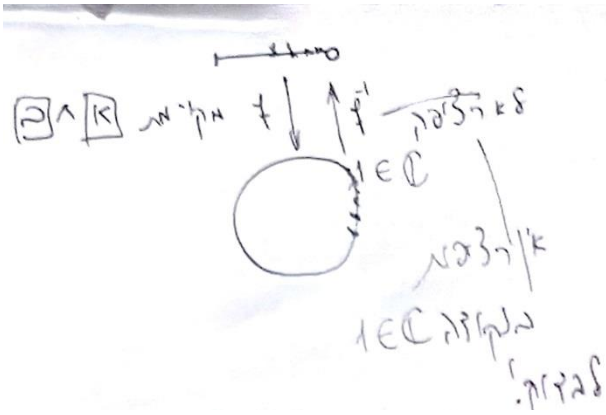


$q:\mathbb{R}\to \mathrm{T}:=\{\mathrm{z}\in\mathbb{C}:\|\,z\,\|=1\},\quad q(\mathrm{t})=cis(2\pi t)=\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $\mathrm{f}:[0,1)\to\mathrm{T}$.





אז $\mathrm{f}:[0,1)\to\mathrm{T}$ רציפה חח"ע ועל

אבל $\mathrm{f}^{-1}:\mathrm{T}\to[0,1)$ לא רציפה בנקודה $z=1\in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

__הגדרה__: נסמן $(X_1,\tau_1)\simeq(X_2,\tau_2)$ אם קיים $X_1\overset{f}{\to}X_2$ $homeomorphism$ ונגיד מרחבים **הומיאומורפיים**.

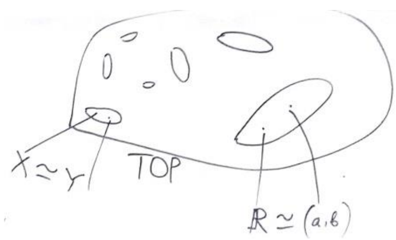
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau)\simeq(X,\tau)$.

2) $(X_1,\tau_1)\simeq(X_2,\tau_2)\Leftarrow(X_1,\tau_1)\simeq(X_2,\tau_2)$. $(X_2,\tau_2)\simeq(X_1,\tau_1)$

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1)\simeq(X_2,\tau_2)\\(X_2,\tau_2)\simeq(X_3,\tau_3)\end{cases}\Rightarrow(X_1,\tau_1)\simeq(X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1\circ f_2$).



__שאלה חשובה__: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X,Y הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X\simeq Y$ או $X\not\simeq Y$

__שאלה יותר כללית__: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X\overset{f}{\to}Y$ (ז"א מתי Y = "תמונה רציפה" של X).

הערה: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f:X\to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f:A\to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c\neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם: $M_c\colon E\to E\ \in Lip_{|c|}$, $M_c(x)=c\cdot x$, $0\neq c\in\mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1}=M_{c^{-1}}}$$

- **משפט:** כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה:

שלב א' $\forall r>0,\forall a\in E\colon B_r(a)\simeq B_1(0)$

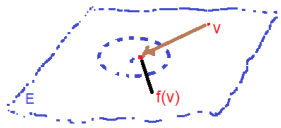
כי: $B_1(0)\underbrace{\simeq}_{M_r}B_r(0)\underbrace{\simeq}_{T_a}B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' מ"ל ש: $E\underbrace{\simeq}_{f}B_1(0)$.

נגדיר $\boxed{f(v)=\frac{1}{1+\|v\|}\cdot v}$ $\quad f:E\to B(0_E,1)$

$$f(v)\in B(0_E,1)\Leftarrow f(v)=\left\|\tfrac{1}{1+\|v\|}v\right\|=\tfrac{\|v\|}{1+\|v\|}<1$$



$f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\|x\|}\cdot x$ $\quad f^{-1}:B(0_E,1)\to E$

☺

תוצאות:

$$\mathbb{R}\simeq(-1,1)\simeq(a,b)\quad\forall a<b$$

$$\mathbb{R}^n\simeq B(\mathrm{v},r)\quad\forall \mathrm{v}\in\mathbb{R}^n$$

$\mathbb{R}^2 \simeq$ **עיגול פתוח** $\simeq (-a,a)\times(-a,a)$

(רמז: $\|\;\|$ שקול טופולוגית ל $\|\;\|_{\max}$ ב $\mathbb{R}^2$)

....

הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (חסימות, שלמות, ...)

המשך דוגמאות:

- $[a,b]\simeq[c,d]$ כאשר $a<b$, $c<d$
- $(a,\infty)\simeq(c,d)\simeq(-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $(0,\infty)\ \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\cong}}\ \mathbb{R}$).

תרגיל: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

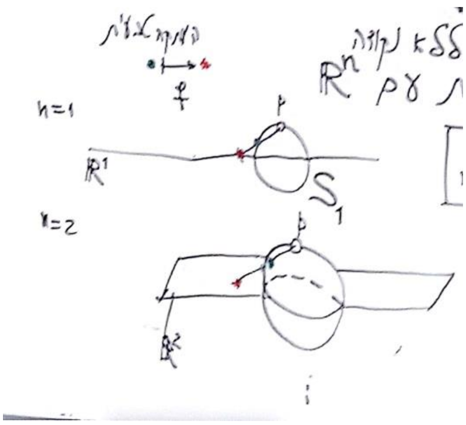
- היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\}\simeq\mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n=\{(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i^2=1\}$

למשל: כאשר $n=1,2$ נגדיר f לפי:



קשירות

הערה: לכל מ"ט (X,τ) תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $X=\varnothing^c$, $\varnothing = X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרות: נניח (X,τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות**.

ב) אומרים (X,τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X,\tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

הערה חשובה: (X,τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

- אם: $\mathbb{R} \supset \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5,\infty)$

  אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ ו $[2,4)$ **סגוחות** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

- מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

  יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

  $$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

  $$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

- הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

הגדרה: נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \varnothing, X_2 \neq \varnothing$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ <u>כקבוצה</u> $X = X_1 \cup X_2$ עם <u>טופולוגיה</u> הבאה

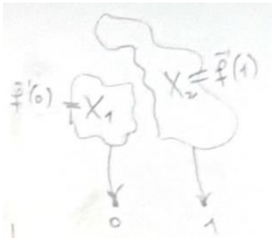
$$\tau \coloneqq \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

משפט: התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau)\notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X\xrightarrow{f}[0,1]$ כך ש $f(X)=\{0,1\}$



הוכחה: $2 \Rightarrow 1$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O)=\begin{cases} X & \{0,1\}\subset O \\ \varnothing & \{0,1\}\cap O=\varnothing \\ X_1 & \{0,1\}\cap O=\{0\} \\ X_2 & \{0,1\}\cap O=\{1\} \end{cases}$$

$1 \Rightarrow 2$ $X=f^{-1}(0)\cup f^{-1}(1)$ פירוק טופולוגי (מדוע ?)

☺

שימו לב: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

תרגיל: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של $A\subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A: X\to\{0,1\},\ \chi_A(a)=1 \quad \forall a\in A,\quad \chi_A(x)=0 \quad \forall x\notin A$$

הערה: $A\subseteq X$ סגוחה אם ורק אם $\partial(A)=\varnothing$.

משפט: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש $X\in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X)=Y$. צ"ל $Y\in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $Y=\underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset}\sqcup\underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר Y_1,Y_2 פתוחות.

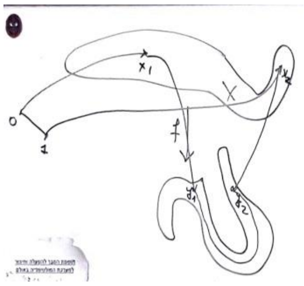
אזי $X=f^{-1}(Y_1)\sqcup f^{-1}(Y_2)$

כאשר $f^{-1}(Y_1),f^{-1}(Y_2)\neq\emptyset$ (כי f היא פונקציה על) וגם הן **פתוחות** כי f רציפה.
קיבלנו ש X פריק, ז"א $X\notin Conn$ בסתירה!

הגדרה: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מ x ל y. **מסילה** מ x_1 ל x_2 $[0,1]\xrightarrow{\varphi}X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0)=x_1$, $\varphi(1)=x_2$. סימון: $X\in PConn$.

משפט: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X\in PConn$. f על ורציפה אז $f(X)=Y$. צ"ל - $Y\in PConn$.



נניח $y_1,y_2\in Y$, אז קיימים $x_1\xrightarrow{f}y_1$, $x_2\xrightarrow{f}y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1]\xrightarrow{\varphi}X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0)=x_1$, $\varphi(1)=x_2$.

נגדיר מסילה – $[0,1]\xrightarrow{f\circ\varphi}Y$ $\quad [0,1]\xrightarrow{\varphi}X\xrightarrow{f}Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1]\to[0,1]^2$ (Peano curve).

משפט: $PConn\subset Conn$.

הוכחה: נניח $X\in PConn$. צ"ל $X\in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X=X_1\sqcup X_2$

נבחר $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$.

$X\in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ x_1 ל x_2, לכן

$$[0,1]\xrightarrow{\varphi}X \qquad \varphi(0)=x_1,\varphi(1)=x_2$$

כעת $[0,1]=\varphi^{-1}(X_1)\sqcup\varphi^{-1}(X_2)$

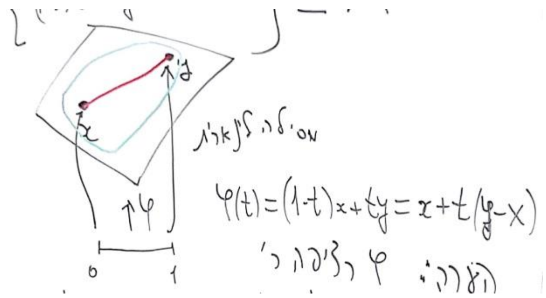
$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $(0\in\varphi^{-1}(X_1),1\in\varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1]\in Conn$.

☺

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x, y \in X$ מתקיים $\{(1-t)x + ty : 0 \le t \le 1\} \subseteq X$ (מסילה לינארית) נסמן $X \in Conv$.



הערה:

φ רציפה כי $\varphi \in Lip_{\|y-x\|}$.

דוגמה: כל מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E.

טענה: $\boxed{Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn}$

הגדרה: $\mathbb{R} \supseteq X \neq \varnothing$ **קטע** אם לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$.

טענה: נניח $X \subset \mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X \in Conv$

3) $X \in PConn$

4) $X \in Conn$

הסבר: $(1) \Leftarrow (2)$: לכל $a, b \in X$ מתקיים $[a, b] \subseteq X$. מצד שני $[a, b] = \{a + (b-a)t \mid 0 \le t \le 1\}$.

$(4) \Leftarrow (3) \Leftarrow (2)$ נובע מהכלות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

$(1) \Leftarrow (4)$ אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a, b \in X$ כך ש $[a, b] \not\subset X$.

ז"א קיימים: $a < c < b$ כך ש $a, b \in X$ אבל $c \notin X$.

נגדיר $X_1 \coloneqq (-\infty, c) \cap X, X_2 \coloneqq (c, \infty) \cap X$

ואז נקבל ש $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש - $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(ערך הביניים):** נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך ביניים.

<u>**הוכחה**</u>**:** $(1) \Leftarrow (2)$: תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{קטעים\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(2) \Leftarrow (1)$: נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל – 0 ואת X_2 שולחת ל – 1.

X_1, X_2 פתוחות ב – $X \Leftarrow$ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש – $f(X) = \{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

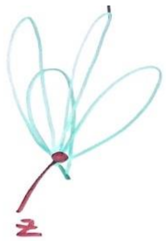
☺

<u>**משפט**</u> **(האלומות – תנאי מספיק לקשירות):** נניח X מ"ט, $X = \bigcup_{j \in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.



הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j \in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1, X_2 כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים $\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$

כעת נשים לב ש $Y_j \cap X_1$ ו $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו $z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת $X_2 = \bigcup_{j \in J}(X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

<u>**תוצאות:**</u>

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור $A_1 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

<u>הגדרה:</u> (מרכיבי קשירות): במ"ט X נגדיר את היחס הבא

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$ הסבר: $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$,   הסבר: $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Rightarrow x \equiv z$ הסבר: $A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

<u>הגדרה</u>: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".