

1. חשב את הגבול הבא  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x \frac{\sin^3 3t}{(1+t^2)^{10}} dt$

2. תהי  $f$  פונקציה יורדת כך ש  $\int_a^\infty f$  מתכנס

a. הוכח כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

b. הוכח כי אפילו  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = 0$  (רמז: הראה קודם ש  $\sum 2^n f(2^n) < \infty$ )

3. נוסחת בונה תהי  $f$  מונוטונית ב  $[a, b]$  ו  $g$  אינטגרבילית אי שלילית בקטע זה. הוכח שקיימת נקודה  $c \in [a, b]$  עבורה מתקיים

(רמז: הנח ב.ה.כ ש  $f$  יורדת. הוכח  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$ )

שלפונקציה  $H(t) := [f(b) - f(a)] \int_a^t g(x)dx$  קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש

$(H(c) = \int_a^b [f(b) - f(x)]g(x)dx$

4. נוסחת בונה תהי תהי  $f$  מונוטונית ב  $[a, b]$  כך ש  $f'$  מוגדרת ואינטגרבילית בקטע, ותהי  $g$  רציפה בקטע. הוכח שקיימת נקודה  $c \in [a, b]$  עבורה מתקיים

(רמז: הגדר  $G(x) = \int_a^x g(t)dt$   $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$ )

הפעל אינטגרציה בחלקים)

5. הוכח ש  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  מתכנס (רמז: נוסחת בונה)

6. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר  $\alpha$  האינטגרל הבא מתכנס  $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx$

7. הראה שהאינטגרל הבא מתכנס  $\int_0^\infty x^2 \sin(x^4) dx$

8. נגדיר את פונקציה גמא. זו פונקציה חשובה, קשורה להשערת רימן (מי שפותר את ההשערה מקבל מיליון דולר, תלמדו את ההשערה בהמשך לימודיכם)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

a. הוכח שזו פונקציה מוגדרת היטב לכל  $x > 0$

b. תוך שימוש באינטגרציה בחלקים הוכח  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

c. הראה כי  $\Gamma(1) = 1$  והסק כי  $\Gamma(n) = (n-1)!$  לכל  $n$  טבעי