חשבון אינפי מתקדם
תרגיל 4 – פתרון
כלל השרשרת, נוסחת טיילור, טור טיילור

1.

$$w=\ln\left(3x^2-2y+4z^3\right)$$
$$x=t^{1/2}\ ,\ y=t^{2/3}\ ,\ z=t^{-2}$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{6x}{3x^2-2y+4z^3}\frac{1}{2t^{1/2}}-\frac{2}{3x^2-2y+4z^3}\frac{2}{3t^{1/3}}-\frac{12z^2}{3x^2-2y+4z^3}\frac{2}{t^3}=$$

$$=\frac{1}{3x^2-2y+4z^3}\left(\frac{6x}{2t^{1/2}}-\frac{4}{3t^{1/3}}-\frac{24z^2}{t^3}\right)=\frac{1}{3t-2t^{2/3}+4t^{-6}}\left(\frac{6t^{1/2}}{2t^{1/2}}-\frac{4}{3t^{1/3}}-\frac{24t^{-4}}{t^3}\right)$$

$$=\frac{1}{3t-2t^{2/3}+4t^{-6}}\left(3-\frac{4}{3t^{1/3}}-24t^{-7}\right)=\frac{1}{3t-2t^{2/3}+4t^{-6}}\left(\frac{9t^{1/3}-4-72t^{-\frac{20}{3}}}{3t^{1/3}}\right)=\frac{9t^{1/3}-4-72t^{-\frac{20}{3}}}{9t^{4/3}-6+12t^{-\frac{17}{3}}}$$

2.

$$w=x^3y^2z^4$$
$$x=t^2\ ,\ y=t+2\ ,\ z=2t^4$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$3x^2y^2z^4\cdot 2t+2x^3yz^4+4x^3y^2z^3\cdot 8t^3\Big|_{t=1,x(1)=1,y(1)=3,z(t)=2}$$

$$=864+96+2304=3264$$

3. חשבו את הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial x}$ של הפונקציה המורכבת $f(g(x,y),h(x,y))$

כאשר

$$f(u,v)=\ln\left(u+\sqrt{u^2+v^2}\right)$$
$$g(x,y)=x^2-y^2$$
$$h(x,y)=e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)2x+\frac{1}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)ye^{xy}=\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{1}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)2y+\frac{1}{u+\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)xe^{xy}=\dots$$

נותר להציב $u=x^2-y^2$ ו- $v=e^{xy}$.

4. חשבו את $J_{g\circ f}(1,\frac{\pi}{4},2)$ כאשר

$$f(x,y,z)=\left(x^2\sin y,\frac{x}{z},z\cos y\right)$$

$$g(x,y,z)=\left(x^4z^2,x^2\ln(2y),xyz\right)$$

$$J_{g\circ f}(1,\frac{\pi}{4},2)=J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)$$

$$f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$$

$$J_g\left(f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)\right)=\begin{pmatrix}4x^3z^2 & 0 & 2x^4z\\ 2x\ln 2y & \frac{x^2}{y} & 0\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}\Bigg|_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)}=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)=\begin{pmatrix}2x\sin y & x^2\cos y & 0\\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2}\\ 0 & -z\sin y & \cos y\end{pmatrix}\Bigg|_{\left(1,\frac{\pi}{4},2\right)}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$J_{g\circ f}(1,\frac{\pi}{4},2)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

5. חשבו דיפרנציאלים מסדר ראשון ושני של הפונקציה המורכבת $u=f(\xi,\eta,\zeta)$
כאשר $\xi=x^2+y^2,\eta=x^2-y^2,\zeta=2xy$ (x,y משתנים בלתי תלויים).

נניח ש $f \in C^2$ (זה יבטיח בין היתר ש $f_{\xi\eta} = f_{\eta\xi}$ ... ז"א הנגזרות המעורבות מסדר שני שוות)

$$df = f_x dx + f_y dy$$
$$f_x = f_\xi 2x + f_\eta 2x + f_\zeta 2y$$
$$f_y = f_\xi 2y - f_\eta 2y + f_\zeta 2x$$
$$\Rightarrow df = 2\left(f_\xi x + f_\eta x + f_\zeta y\right)dx + 2\left(f_\xi y - f_\eta y + f_\zeta x\right)dy$$

$$d^2 f = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$$
$$f_{xx} = \left(f_{\xi\xi}2x + f_{\xi\eta}2x + f_{\xi\zeta}2y\right)2x + 2f_\xi + \left(f_{\eta\xi}2x + f_{\eta\eta}2x + f_{\eta\zeta}2y\right)2x$$
$$+2f_\eta + \left(f_{\zeta\xi}2x + f_{\zeta\eta}2x + f_{\zeta\zeta}2y\right)2y = \ldots$$
$$f_{xy} = \left(f_{\xi\xi}2y - f_{\xi\eta}2y + f_{\xi\zeta}2x\right)2x + \left(f_{\eta\xi}2y - f_{\eta\eta}2y + f_{\eta\zeta}2x\right)2x$$
$$+\left(f_{\zeta\xi}2y - f_{\zeta\eta}2y + f_{\zeta\zeta}2x\right)2y + 2f_\zeta = \ldots$$
$$f_{yy} = \left(f_{\xi\xi}2y - f_{\xi\eta}2y + f_{\xi\zeta}2x\right)2y + 2f_\xi - \left(f_{\eta\xi}2y - f_{\eta\eta}2y + f_{\eta\zeta}2x\right)2y$$
$$-2f_\eta + \left(f_{\zeta\xi}2y - f_{\zeta\eta}2y + f_{\zeta\zeta}2x\right)2x = \ldots$$

נותר לפשט ולהציב ב $d^2 f$.

6.

א. $\sin 29^0 \tan 46^0$

$$\sin 29^0 \tan 46^0 = \sin\left(30^0 - 1^0\right)\tan\left(45^0 + 1^0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

הפונקציה $f(x,y) = \sin x \tan y$ דיפרנציאבילית בנקודה $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, ולכן

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

כאשר: $(x,y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Delta x = -\frac{\pi}{180} \quad , \quad \Delta y = \frac{\pi}{180}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{180}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{180}$$

$$f_x(x,y)=\cos x\tan y\ \Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{6}\\ y=\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\sin x}{\cos^2 y}\Big|_{\substack{x=\frac{\pi}{6}\\ y=\frac{\pi}{4}}}=1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 29^0\tan 46^0\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}+\frac{\pi}{180}\approx 0.494$$

ב. $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$

ניקח $(x,y)=(1,2)$

$\Delta x=0.02\quad,\quad\Delta y=-0.03$

פונקציה $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,2)$, ולכן :

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Big|_{(1,2)}=2$$

$$f(1,2)=3$$

$$\sqrt{1.02^3+1.97^3}\approx 3+\frac{1}{2}\cdot 0.02-2\cdot 0.03=2.95$$

7. מצאו פיתוח של פונקציה $f(x,y,z)=x^2+3z^2-2yz-3z$ בטור טיילור מסביב לנקודה $(0,1,2)$.

נציב $x_1=x$

$y_1=y-1\quad\Leftarrow\quad y=y_1+1$

$z_1=z-2\quad\Leftarrow\quad z=z_1+2$

ונקבל :

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=x_1^2+3(z_1+2)^2-2(y_1+1)(z_1+2)-3(z_1+2)\\&=x_1^2+3(z_1^2+4z_1+4)-2(y_1z_1+z_1+2y_1+2)-3z_1-6\\&=2-4y_1+7z_1+x_1^2+3z_1^2-2y_1z_1\\&=2-4(y-1)+7(z-2)+x^2+3(z-2)^2-2(y-1)(z-2)\end{aligned}$$

הנוסחה האחרונה היא פיתוח טיילור של הפולינום $f(x,y,z)$ מסביב לנקודה $(0,1,2)$.

8. מצאו פיתוח של פונקציה $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ לפי נוסחת טיילור (עד סדר 2 כולל) מסביב לנקודה $(2,2)$.

$$f(x,y)=f(2,2)+df((2,2),(h_1,h_2))+\frac{d^2f((2,2),(h_1,h_2))}{2!}+R_2f(2+\theta h_1,2+\theta h_2)$$

כאשר:

$$0\le\theta\le1$$
$$h_1=x-2$$
$$h_2=y-2$$

$$f_x=\left.\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right|_{(2,2)}=\frac{1}{4}$$

$$f_y=\left.\frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right|_{(2,2)}=\frac{1}{4}$$

$$f_{xx}=\left.-\frac{1}{4}(x+y)^{-3/2}\right|_{(2,2)}=-\frac{1}{32}$$

$$f_{xy}=\left.-\frac{1}{4}(x+y)^{-3/2}\right|_{(2,2)}=-\frac{1}{32}$$

$$f_{yy}=\left.-\frac{1}{4}(x+y)^{-3/2}\right|_{(2,2)}=-\frac{1}{32}$$

$$f(2,2)=2$$

$$\Rightarrow f(x,y)=2+\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{32}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)(y-2)-\frac{1}{32}(y-2)^2\right)+R_2f$$
$$=2+\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2)-\frac{1}{64}(x-2)^2-$$
$$-\frac{1}{32}(x-2)(y-2)-\frac{1}{64}(y-2)^2+R_2f$$

9. מצאו פיתוח של פונקציה $f(x,y)=e^{2x}\ln(1+y)$ לפי נוסחת טיילור (עד סדר 4 כולל) מסביב לנקודה $(0,0)$.

$$x\in\mathbb{R}\qquad e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\left(1+2x+2x^2+\frac{8x^3}{6}+\frac{16x^4}{24}+\dots\right)$$

$$-1<y\le1\qquad \ln(1+y)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n}=\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x,y\right)=\left(1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+o\left(y^4\right)\right)$$

$$=y+2xy--\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+2x^2y-\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}xy^3-x^2y^2+\frac{4}{3}x^3y+o\left(\left\|\left(x,y\right)\right\|^4\right)$$

10. בהנחה ש $|x|,|y|,|z|$ מספיק קטנים מצאו נוסחאות מקורבות עבור הפונקציות הבאות :

א. $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1+xy}$

עבור $|x|,|y|$ מספיק קטנים :

$$f\left(x,y\right)\approx f\left(0,0\right)+df\left(\left(0,0\right),\left(h_1,h_2\right)\right)+\frac{d^2f\left(\left(0,0\right),\left(h_1,h_2\right)\right)}{2!}$$

כאשר :

$$h_1=x$$
$$h_2=y$$

$$f_x\left(0,0\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+xy\right)-\left(x+y\right)y}{\left(1+xy\right)^2}=\frac{1-y^2}{\left(1+xy\right)^2-\left(x+y\right)^2}\Bigg|_{(0,0)}=1$$

$$f_y\left(0,0\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}\cdot\frac{\left(1+xy\right)-\left(x+y\right)x}{\left(1+xy\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(1+xy\right)^2-\left(x+y\right)^2}\Bigg|_{(0,0)}=1$$

$$f_{xx}\left(0,0\right)=\frac{-\left(1-y^2\right)\left(2\left(1+xy\right)y+2\left(x+y\right)\right)}{\left(\left(1+xy\right)^2+\left(x+y\right)^2\right)^2}\Bigg|_{(0,0)}=0$$

$$f_{yy}\left(0,0\right)=\frac{-\left(1-x^2\right)\left(2\left(1+xy\right)x+2\left(x+y\right)\right)}{\left(\left(1+xy\right)^2+\left(x+y\right)^2\right)^2}\Bigg|_{(0,0)}=0$$

$$f_{xy}\left(0,0\right)=\frac{-2y\left(\left(1+xy^2\right)+\left(x+y\right)^2\right)-\left(1-y^2\right)\left(2\left(1+xy\right)x+2\left(x+y\right)\right)}{\left(\left(1+xy\right)^2+\left(x+y\right)^2\right)^2}\Bigg|_{(0,0)}=-2$$

$$f\left(0,0\right)=0$$

$$\Rightarrow f\left(x,y\right)\approx x+y+\frac{1}{2}\left(-4xy\right)=x+y-2xy$$

ב. $f(x,y,z)=\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z$

עבור $|x|,|y|,|z|$ קטנים :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o\left(y^2\right)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o\left(z^2\right)$$

$$\cos x\left(x+y+z\right) = 1 - \frac{\left(x+y+z\right)^2}{2} + o\left(\left(x+y+z\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2xy + y^2 + 2\left(xz+yz\right) + z^2\right) + o\left(\left\|\left(x,y,z\right)\right\|^2\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x,y,z\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(xy++xz+yz\right) + o\left(\left\|\left(x,y,z\right)\right\|^2\right) -$$

$$-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{y^2}{2}+o\left(y^2\right)\right)\left(1-\frac{z^2}{2}+o\left(z^2\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(xy++xz+yz\right) + o\left(\left\|\left(x,y,z\right)\right\|^2\right) -$$

$$-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}+o\left(\left\|\left(x,y,z\right)\right\|^2\right)\right)$$

$$= -\left(xy++xz+yz\right) + o\left(\left\|\left(x,y,z\right)\right\|^2\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x,y,z\right) \approx -\left(xy+xz+yz\right)$$

עבור $|x|,|y|,|z|$ מספיק קטנים .

פתרונות של תרגילים נוספים:

ב"ה.

<u>אנליזה מתקדמת 1 / פתרון תרגיל 4</u>

$\boxed{\text{משפט כלל השרשרת בקצרה}}$

1. (א) חשבו $\frac{du}{dt}$ <u>ישירות</u>

$u=x^2+y^2+xz$

$x=\sin t$

$y=e^t$

$z=t^3$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=$$

$$=(2x+z)\cos t+2y\cdot e^t+x\cdot 3t^2=(2\sin t+t^3)\cos t+2e^t\cdot e^t+\sin t\cdot 3t^2=$$

$$=\sin 2t+t^3\cos t+2e^{2t}+3t^2\cdot\sin t$$

(ב) $f(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad x=u\sin v$, $y=u\cos v$

$$\frac{df}{du}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{df}{dv}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{df}{dv}=\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}\right)\cdot u\cos v\left(-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{-x}{y^2}\right)u\sin v=$$

$$=\left(\frac{1}{y+\frac{x^2}{y}}\right)u\cos v+\frac{x}{y^2+x^2}\cdot u\sin v=\frac{y}{x^2+y^2}u\cos v+\frac{x}{x^2+y^2}u\sin v=$$

$$=\frac{u}{x^2+y^2}\left[y\cos v+x\sin v\right]\underset{\substack{\text{הצבת}\\ x,y}}{=}\frac{u}{u^2}\left[\overset{u}{\overbrace{u\cos^2 v+u\sin^2 v}}\right]=\underline{\underline{1}}$$

$$\frac{df}{du}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\sin v+\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)\cos v=\frac{1}{\underset{u^2}{x^2+y^2}}\left[y\sin v-x\cos v\right]=\frac{1}{u^2}\left[\overset{0}{\overbrace{u\cos v\sin v-u\sin v\cos v}}\right]$$

$$=\underline{\underline{0}}$$

.2 $dg_a(h)$ עבור $a=(1,1)$; $h=(3,\frac{1}{2})$ $=\varphi\circ f$

$$g(a)=\varphi\circ f(a)$$

$f(a)$ ו- $\varphi(f(a))$ נמצא את $f(a)=(3,3)$

כעת נחשב את מט' היעקובי (הדיפרנציאל) של f את מה שעשינו ונכפול אותם.

$$J_f(a)=\begin{pmatrix} f'_{1x} & f'_{1y} \\ f'_{2x} & f'_{2y}\end{pmatrix}\Bigg|_a=\begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 0 & 2y\end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$J_\varphi(f(a))=\begin{pmatrix} \varphi'_{1u} & \varphi'_{1v} \\ \varphi'_{2u} & \varphi'_{2v} \\ \varphi'_{3u} & \varphi'_{3v}\end{pmatrix}\Bigg|_{f(a)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2v\end{pmatrix}\Bigg|_{(3,3)}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$dg_a(h)=J_\varphi\bullet J_f=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}h=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ 19 \\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10\frac{1}{2} \\ 19 \\ 6\end{pmatrix}$$