הרצאה 8

טענה 1

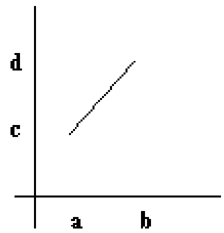
יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $a<b, c<d$ אזי:

1. $\left|[a,b]\right|=\left|[c,d]\right|$.
2. $\left|(a,b)\right|=\left|(c,d)\right|$.
3. $\left|(a,b]\right|=\left|(c,d]\right|$.
4. $\left|(0,1]\right|=\left|(0,1)\right|$.

הוכחה

1. הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x)=\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$ היא חח"ע ועל מ $[a,b]$ ל $[c,d]$.

המחשה



באותו אופן ניתן להוכיח טענות 2,3

4. תהיי $f:(0,1]\to(0,1)$ הפונקציה הבאה. לכל $n\in\mathbb{N}$ $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ ולכל $x\neq\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}$ $f(x)=x$. $f:(0,1]\to(0,1)$ היא פונקציה חח"ע ועל.

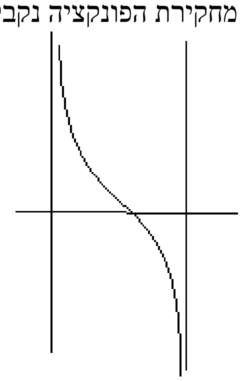
טענה 2

$\left|\left[(0,1)\right]\right|=\left|\mathbb{R}\right|$

הוכחה

הפונקציה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$ היא פונקציה חח"ע ועל.

מחקירת הפונקציה נקבל שהגרף המתקבל הוא:



טענה

אם A קבוצה בת מניה, שאינה ריקה, קיימת פונקציה f מ $\mathbb{N}$ על A.

הוכחה

אם A בת מניה אז $A \sim \mathbb{N} \vee A$ סופית.

אם $A \sim \mathbb{N}$ אז קיימת פונקציה $f:\mathbb{N} \to A$ חח"ע ובפרט על.

אם A סופית ולא ריקה אז $A=\{a_1,a_2,a_3,...,a_n\}$ נגדיר $f(n)=\begin{cases} a_n & n\le k \\ a_1 & n>k \end{cases}$ וקיבלנו פונקציה על.

<u>**משפט האלכסון של קנטור**</u>

הקטע הפתוח $(0,1)$ אינו בן-מניה.

<u>**הוכחה**</u>

תהיי A קבוצת המספרים ב $(0,1)$, אשר בפיתוחם העשרוני, הספרות 0 ו 9 אינן מופיעות אחרי הנקודה העשרונית. הסיבה שאנחנו מגדירים את הקבוצה A היא כדי להימנע ממספרים ממשיים בעלי שני פיתוחים עשרוניים. (למשל $0.300000.....=0.299999.....$) אם נוכיח ש A אינה בת מניה נקבל ש $(0,1)$ אינה בת מניה. כי אם $(0,1)$ בת מנייה מכיוון ש $A\subseteq(0,1)$ נקבל ש A בת מנייה.

תהיי $f:\mathbb{N}\to A$ פונקציה. נראה שהפונקציה f לא יכולה להיות על.

$$f(1)=0.a_{11}a_{12}a_{13}...$$

$$f(2)=0.a_{21}a_{22}a_{23}...$$

$$f(3)=0.a_{31}a_{32}a_{33}...$$

.

.

.

נסמן $b_n=\begin{cases} 1 & a_{nn}\ne 1 \\ 2 & a_{nn}=1 \end{cases}$ נראה שלמספר $0.b_1b_2b_3b_4....$ אין מקור.

נניח בשלילה קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $f(n)=0.b_1b_2b_3b_4...$ מכיוון שלכל איבר ב A יש הצגה עשרונית יחידה ומכיוון ש $b_n\ne a_{nn}$ נקבל סתירה.

הראינו שלא קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to A$ שהיא על ולכן A לא בת מניה ולכן $(0,1)$ אינו בן מניה.

<u>**מסקנה**</u>

לקבוצת הממשיים ולכל אחד מן הקטעים הסופיים והאינסופיים יש אותה עוצמה שהיא אינה בת מניה.

<u>**הגדרה**</u>

עוצמת קבוצת הממשיים נקראת עוצמת הרצף ומסומנת ב $\aleph$.

<u>**משפט**</u>

האיחוד של שתי קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

<u>**הוכחה**</u>

נניח ש A,B קבוצות בנות מניה ונוכיח ש $A\cup B$ קבוצה בת מניה. מכיוון ש $B\setminus A\subseteq B$ נקבל שגם $B\setminus A$ קבוצה בת מניה.

אם $A=\phi$ אז $A\cup B=B$ ומכיוון ש B קבוצה בת מניה אז גם $A\cup B$ בת מניה. באותו אופן אם $B=\phi$ אז $A\cup B=A$ ולכן $A\cup B$ בת מניה. נניח ש A,B לא ריקות.

נסמן $C=B\setminus A$ ואז $C\cup A=B\cup A$, אם שתי הקבוצות סופיות אז $C\cup A$ גם סופית ולכן בת מניה.

נניח שאחת מהקבוצות סופית. נניח ב.ה.ג.כ ש A סופית אז $A=\{a_1,a_2,...a_k\}$.

נגדיר פונקציה $h: A \to \mathbb{N}$ ע"י $h(a_i) = i$.

הקבוצה $\mathbb{N} \setminus \{1,2,...,k\}$ היא בת מניה אינסופית, ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: C \to \mathbb{N} \setminus \{1,2,...,k\}$

נגדיר פונקציה $g: A \cup C \to \mathbb{N}$ ע"י $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ h(x) & x \in A \end{cases}$ מכיוון שהקבוצות A,C זרות אז נקבל פונקציה חח"ע ועל.

נניח ש A,C קבוצות אינסופיות. מכיוון ש $2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}-1, A, C$ הן קבוצות אינסופיות בנות מנייה קיימות פונקציות $f: C \to 2\mathbb{N}, h: A \to 2\mathbb{N}-1$ חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $g: A \cup C \to \mathbb{N}$ ע"י $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in C \\ h(x) & x \in A \end{cases}$ מכיוון שהקבוצות A,C זרות אז הפונקציה היא חח"ע ועל.

<u>מסקנה</u>

ניתן להראות באינדוקציה שאיחוד של מספר סופי של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.

<u>משפט</u>

א. אם f היא פונקציה מ A על B ו A היא קבוצה בת מנייה, אז גם B היא בת מנייה.

ב. אם $f: A \to B$ חח"ע ו B בת מניה, אז גם A בת מניה.

<u>הוכחה</u>

א. מכיוון ש $f: A \to B$ היא פונקציה על אז לכל $b \in B$ $f^{-1}[\{b\}] \neq \phi$ ולכן לכל $b \in B$ ניתן לבחור $a_b \in f^{-1}[\{b\}]$. נסמן $A' = \{a_b | b \in B\}$ מכיוון ש A היא קבוצה בת מניה ו $A' \subseteq A$ אז גם A' היא קבוצה בת מניה. נגדיר $f': A' \to B$ ע"י $f'(a_b) = b$ וקיבלנו פונקציה חח"ע ועל. נשים לב שהפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $b,c \in B$ $f^{-1}[\{b\}] \cap f^{-1}[\{c\}] = \phi$ ולכן לא יכול להיות אותו נציג לשתי קבוצות שונות.

ב. $f[A] \subseteq B$, B קבוצה בת מניה ולכן $f[A]$ קבוצה בת מניה. מכיוון ש $f: A \to B$ חח"ע הפונקציה $f': A \to f[A]$ המוגדרת ע"י $f'(a) = f(a)$ היא חח"ע ועל ולכן A בת מניה.

<u>משפט</u>

אם לכל $n \in \mathbb{N}$ A_n היא קבוצה בת מניה, אז $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ היא קבוצה בת מניה.

<u>הוכחה</u>

הראינו שהקבוצה $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ היא בת מניה.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר פונקציה על $f_n: \mathbb{N} \to A_n$. קיימת כזאת מכיוון שאם A_n אינסופית קיימת פונקציה $f_n: \mathbb{N} \to A_n$ חח"ע ועל ובפרט על ואם A_n סופית אז $A_n = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ נגדיר $f_n: \mathbb{N} \to A_n$ ע"י $f_n(x) = \begin{cases} a_t & 1 \leq t \leq k \\ a_1 & k < t \end{cases}$.

נגדיר פונקציה $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ע"י $g(n_1, n_2) = f_{n_1}(n_2)$ ונקבל פונקציה על.

<u>משפט קנטור</u>

תהיי A קבוצה כלשהי אז $|A| \neq |P(A)|$.

<u>הוכחה</u>

נוכיח שלא קיימת פונקציה מ A על $P(A)$.

תהיי $f:A\to P(A)$ אז לכל $a\in A$ נקבל ש $f(a)\subseteq A$.

קיימות שתי אפשרויות: אפשרות 1: $a\in f(a)$ אפשרות 2: $a\notin f(a)$.

תהיי $B=\{a\in A \mid a\notin f(a)\}$. נניח שקיים $b\in A$ כך ש $f(b)=B$.

אם $b\in B$ נקבל לפי הגדרת B ש $b\notin f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

אם $b\notin B$ נקבל מהגדרת B ש $b\in f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

<u>הגדרת סדר בין עוצמות</u>

<u>הגדרה</u>

לכל שתי קבוצות A,B נאמר ש $|A|\le|B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע מ A ל B.

<u>טענה</u>

אם $A\subseteq B$ אז $|A|\le|B|$. נגדיר פונקציה $f:A\to B$ ע"י $f(a)=a$.

<u>משפט</u>

אם $|A|\le|B|\wedge|B|\le|C| \Leftarrow |A|\le|C|$.

<u>הוכחה</u>

אם $f:A\to B, g:B\to C$ הן פונקציות חח"ע אז $g\circ f:A\to C$ היא פונקציה חח"ע.

<u>הגדרה</u>

נאמר ש $|A|<|B|$ אם $|A|\le|B|$ אבל $|A|\ne|B|$.

<u>דוגמאות</u>

1. $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$ מכיוון ש $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ אז $|\mathbb{N}|\le|\mathbb{R}|$ והוכחנו ש $|\mathbb{N}|\ne|\mathbb{R}|$ מסקנה $\aleph_0<\aleph$.
2. $|A|<|P(A)|$ מכיוון שהפונקציה $f:A\to P(A)$ המוגדרת ע"י $f(a)=\{a\}$ היא חח"ע אז $|A|\le|P(A)|$ והראינו קודם ש $|A|\ne|P(A)|$.

<u>משפט</u>

אם $f:A\to B$ היא פונקציה על אז $|B|\le|A|$.

<u>הוכחה</u>

מכיוון ש $f:A\to B$ היא פונקציה על אז לכל $b\in B$ $f^{-1}[\{b\}]\ne\phi$ ולכן לכל $b\in B$ ניתן לבחור $a_b\in f^{-1}[\{b\}]$. נגדיר פונקציה $g:B\to A$ ע"י $g(b)=a_b$ הפונקציה היא חח"ע מכיוון שלכל $b,c\in B$ $f^{-1}[\{b\}]\cap f^{-1}[\{c\}]=\phi$ ולכן לא יכול להיות אותו נציג לשתי קבוצות שונות.

<u>הגדרה</u>

נאמר שהפונקציה $\psi:P(A)\to P(A)$ היא מונוטונית עולה אם $C\subseteq D \leftarrow \psi(C)\subseteq\psi(D)$.

<u>דוגמה</u>

תהיי $A=\{1,2,3\}$ ואז $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

נגדיר $\psi:P(A)\to P(A)$ באופן הבא:

$$\psi(\phi)=\{1\},\psi(\{1\})=\{1,2\},\psi(\{2\})=\{1\},\psi(\{3\})=\{1\},\psi(\{1,2\})=\{1,2\},$$
$$\psi(\{1,3\})=\{1,2\},\psi(\{2,3\})=\{1\},\psi(\{1,2,3\})=\{1,2\}$$

שימו לב שהפונקציה מונוטונית עולה וכן $\psi(\{1,2\})=\{1,2\}$.

נראה שהתכונה הנ"ל מתקיימת לכל פונקציה מונוטונית עולה $\psi : P(A) \to P(A)$

ז"א שתמיד קיים $K \in P(A)$ כך ש $\psi(K) = K$.

שימו לב: $X = \phi \cup \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\}$ $K = \bigcup_{X \subseteq \psi(X)}$ נראה שכל קבוצה K המוגדרת כנ"ל מקיימת

$\psi(K) = K$.

<u>תרגיל</u>

תהי $\psi : P(A) \to P(A)$ פונקציה מונוטונית עולה, הוכח שקיימת קבוצה $K \in P(A)$ כך ש

$\psi(K) = K$.

<u>פתרון</u>

תהיי $\psi : P(A) \to P(A)$ פונקציה מונוטונית עולה. נסמן $K = \bigcup_{X \subseteq \psi(X)} X$ נוכיח ש $\psi(K) = K$.

תחילה נוכיח ש $K \subseteq \psi(K)$.

נניח ש $a \in K$ ולכן $a \in \bigcup_{X \subseteq \psi(X)} X$ מהגדרת האיחוד קיים $X \subseteq \psi(X)$ כך ש $a \in X$ ולכן $a \in \psi(X)$.

מכיוון ש $X \subseteq K$ נקבל מהמונוטוניות של ψ ש $\psi(X) \subseteq \psi(K)$ ומכיוון ש $a \in \psi(X)$ נקבל ש

$a \in \psi(K)$.

נוכיח ש $\psi(K) \subseteq K$

הראינו ש $K \subseteq \psi(K)$ מהמונוטוניות של ψ נקבל ש $\psi(K) \subseteq \psi(\psi(K))$.

מכיוון ש $K = \bigcup_{X \subseteq \psi(X)} X$ אז $\psi(K)$ הוא אחד מהמאוחדים ולכן $\psi(K) \subseteq K$.

<u>תרגיל</u>

תהיי $f : A \to B, g : B \to A$ פונקציות חח"ע הוכיחו שהפונקציה $\varphi : P(A) \to P(A)$ המוגדרת ע"י

לכל $K \in P(A)$ $\varphi(K) = A \setminus g\left[B \setminus f[K]\right]$ היא מונטונית עולה.

<u>פתרון</u>

יהיו $C, D \in P(A)$ כך ש $C \subseteq D$ מכיוון ש $f : A \to B$ פונקציה חח"ע נקבל ש $f[C] \subseteq f[D]$

ומהגדרת ההפרש $B \setminus f[D] \subseteq B \setminus f[C]$ ומכיוון ש $g : B \to A$ פונקציה חח"ע נקבל ש

$g\left[B \setminus f[D]\right] \subseteq g\left[B \setminus f[C]\right]$ ומהגדרת ההפרש $A \setminus g\left[B \setminus f[C]\right] \subseteq A \setminus g\left[B \setminus f[D]\right]$ ולכן

$\varphi : P(A) \to P(A)$ פונקציה מונוטונית עולה.

<u>מסקנה</u>

משני התרגילים האחרונים נקבל שאם $f : A \to B, g : B \to A$ פונקציות חח"ע אז קיימת קבוצה K כך ש

$K = A \setminus g\left[B \setminus f[K]\right]$ מכיוון ש $\varphi : P(A) \to P(A)$ המוגדרת ע"י $\varphi(K) = A \setminus g\left[B \setminus f[K]\right]$ היא

מונוטונית עולה ואז קיימת קבוצה K כך ש $\varphi(K) = K$ ז"א $K = A \setminus g\left[B \setminus f[K]\right]$.

מכיוון ש $g\left[B \setminus f[K]\right] \subseteq A$ נקבל ש $g\left[B \setminus f[K]\right] = A \setminus K$.

<u>משפט קנטור ברנשטיין</u>

אם k_1, k_2 עוצמות, כך ש $k_1 \le k_2$ וגם $k_2 \le k_1$ אז $k_1 = k_2$.

<u>הוכחה</u>

תהיינה A,B קבוצות כך ש $|A|\le|B|\wedge|B|\le|A|$ אז קיימות $f:A\to B, g:B\to A$ פונקציות חח"ע.

מהמסקנה הקודמת קיימת קבוצה $K\subseteq A$ כך ש $g\left[B\setminus f\left[K\right]\right]=A\setminus K$ נגדיר פונקציה $h:A\to B$ ע"י

$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in K \\ g'^{-1}(x) & x\in A\setminus K \end{cases}$ נוכיח ש $h:A\to B$ פונקציה חח"ע ועל.

נשים לב ש g לא על ולכן g לא הפיכה. מכיוון ש g חח"ע הפונקציה $g':B\to g[B]$ המוגדרת ע"י

$g(b)=g'(b)$ לכל $b\in B$ חח"ע ועל, ולכן הפיכה ולכן $g'^{-1}(x)$ מוגדר.

נניח ש $a,b\in A$ כך ש $h(a)=h(b)$ ונוכיח ש $a=b$.

אם $a,b\in K$ אז $f(a)=h(a)=h(b)=f(b)$ מכיוון ש f חח"ע נקבל ש $a=b$.

אם $a,b\in A\setminus K$ אז $g':B\to g[B]$ פונקציה חח"ע ועל ולכן $g^{-1}{}':g[B]\to B$ חח"ע ועל.

$g'^{-1}(a)=h(a)=h(b)=g'^{-1}(b)$ מכיוון ש g'^{-1} חח"ע נקבל ש $a=b$.

אם $a\in K\wedge b\in A\setminus K$ נקבל ש $g^{-1}{}'(b)=f(a)$ בסתירה לכך ש $g^{-1}{}'[A\setminus K]=B\setminus f[K]$ מכיוון ש

$f(a)\notin B\setminus f[K]\wedge g^{-1}{}'(b)\in g^{-1}{}'[A\setminus K]$.

באותו אופן לא ייתכן ש $b\in K\wedge a\in A\setminus K$. ולכן הפונקציה $h:A\to B$ חח"ע.

יהי $b\in B$ אם $b\in f[K]$ אז קיים $a\in K$ ובפרט $a\in A$ כך ש $f(a)=b$. אם $b\notin f[K]$ אז

$g(b)\in A\setminus K$ נסמן $a=g(b)$ ואז $g'^{-1}(a)=b$ ולכן $h:A\to B$ על.

השערת הרצף

השערת הרצף קובעת שעוצמת הקצף היא העוצמה הקטנה ביותר שאינה בת מניה.