[לחפש בגוגל "ברק שושני" - יש שם דף נוסחאות]

מבחן 2011

שאלה ?

פתרון

א. התבנית היסודית הראשונה:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2(x,y) & 0 \\ 0 & f^2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{81}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{81}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{81} & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{81} \end{pmatrix}$$

נשתמש ב

$$\boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{km} \cdot \left(g_{mi\prime j} + g_{mj\prime i} - g_{ij\prime m}\right)}$$

אם $k=1$:

$$\Gamma_{ij}^{1} = \frac{1}{2} g^{1m}\left(g_{mi\prime j} + g_{mj\prime i} - g_{ij\prime m}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{1i\prime j} + g_{1j\prime i} - g_{ij\prime 1}\right) + \cancel{\frac{1}{2} g^{12}(\cdots)} = \frac{1}{2}\frac{y^2}{81}\left(g_{1i\prime j} + g_{1j\prime i} - g_{ij\prime 1}\right)$$

נציב i,j השונים:

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{y^2}{162} \cdot \left(g_{11\prime 1} + \cancel{g_{11\prime 1}} - \cancel{g_{11\prime 1}}\right) = \frac{y^2}{162} \cdot \left(\frac{-162}{y^3}\right) = \boxed{-\frac{1}{y}}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{y^2}{162} \cdot \left(g_{12\prime 2} + g_{12\prime 2} - g_{22\prime 1}\right) = 0$$

ד. נשתמש במשפט Egregium:

$$K = \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma_{11\prime 2}^{2} - \Gamma_{12\prime 1}^{2} + \cancel{\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{21}^{2}} - \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\cdot\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2}\right)$$

$$\Gamma_{ij}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}\left(g_{2i\prime j} + g_{2i} - g_{ij\prime 2}\right) = \frac{y^2}{162}\left(g_{2i\prime j} + g_{2j\prime i} - g_{ij\prime 2}\right)$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{y^2}{162}\left(\cancel{g_{21\prime 1}} + \cancel{g_{21\prime 1}} - g_{11\prime 2}\right) = \boxed{\frac{1}{y}}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{y^2}{162}\left(\cancel{g_{21\prime 2}} + \cancel{g_{22\prime 1}} - \cancel{g_{12\prime 2}}\right) = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{y^2}{162}\left(g_{22\prime 2} + \cancel{g_{22\prime 2}} - \cancel{g_{22\prime 2}}\right) = \boxed{-\frac{1}{y}}$$

וקיבלנו

$$\left(\Gamma^1_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\Gamma^2_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

נציב בנוסחה:

$$K = \frac{1}{\frac{81}{\cancel{y^2}}}\left(-\frac{1}{\cancel{y^2}} - 0 + 0 + \frac{\cancel{1}}{\cancel{y^2}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{y^2}} - 0\right) = \boxed{-\frac{1}{81}}$$

שאלה 3 סעיף ב

הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma^l_{ij} r_{\prime l} + b_{ij}\hat{n}\right)$ הוא סימטרי ב-i ו-k.

פתרון

$$\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\underbrace{\Gamma^1_{ij} r_{\prime 1} + \Gamma^2_{ij} r_{\prime 2} + b_{ij}\hat{n}}_{=r_{\prime ij}}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(r_{\prime ij}\right) = r_{\prime ijk} = \frac{\partial^3 r}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$$

אם הפונקציה r היא C^∞ אז $r_{\prime ijk} = r_{\prime ikj}$.

שאלה 5

כתוב את הביטויים הבאים באמצעות Γ^k_{ij}, $S^k{}_l$, b_{ij}

א. $\left\langle r_{\prime ij}, r_{\prime k}\right\rangle g^{ik}$

ד. $\left\langle \hat{n}, r_{\prime pq}\right\rangle g^{qs}$

פתרון

א.

$$\left\langle r_{\prime ij}, r_{\prime k}\right\rangle g^{ik} = \left\langle \Gamma^{p}_{ij} r_{\prime p} + g_{ij}\hat{n}, r_{\prime k}\right\rangle g^{ik} = \left\langle \Gamma^{1}_{ij} r_{\prime 1} + \Gamma^{2}_{ij} r_{\prime 2} + b_{ij}\hat{n}, r_{\prime k}\right\rangle g^{ik} =$$

$$= \left(\Gamma^{1}_{ij}\left\langle r_{\prime 1}, r_{\prime k}\right\rangle + \Gamma^{2}_{ij}\left\langle r_{\prime 2}, r_{\prime k}\right\rangle + b_{ij}\left\langle \hat{n}, r_{\prime k}\right\rangle\right) g^{ik} = \cdots$$

(נזכור ש$g_{ij} = \left\langle r_{\prime i}, r_{\prime j}\right\rangle$. $\left\langle \hat{n}, r_{\prime k}\right\rangle = 0$ שכן $\hat{n}$ מאונך לווקטורים הנגזרת)

$$\cdots = \left(\Gamma^{1}_{ij} g_{1k} + \Gamma^{2}_{ij} g_{2k}\right) = \left(\Gamma^{p}_{ij} g_{pk}\right) g^{ik} = \Gamma^{p}_{ij}\left(g_{pk} g^{ik}\right) = \cdots$$

נשים לב שיש לנו כאן כפל מטריצות $g_{pk}g^{ik} = \left(G \cdot G^{-1}\right)_{p}^{\ i}$!

$$\cdots \Gamma^{p}_{ij}\left(g_{p1} g^{1i} + g_{p1} g^{2i}\right) = \Gamma^{p}_{ij}\left(I\right)_{p}^{\ i} = \Gamma^{p}_{ij} \cdot \left(I\right)_{p}^{\ i} = \Gamma^{p}_{ij}\delta^{i}_{p}$$

ד.

$$\left\langle \hat{n}, r_{\prime pq}\right\rangle g^{qs} = \left\langle \hat{n}, \Gamma^{k}_{pq} r_{\prime k} + b_{pq}\cdot\hat{n}\right\rangle g^{qs} = \left(\left\langle \hat{n}, \Gamma^{k}_{pq} r_{\prime k}\right\rangle + \left\langle \hat{n}, b_{pq}\hat{n}\right\rangle\right) g^{qs} =$$

$$= \left(\cancel{\Gamma^{k}_{pq}\left\langle \hat{n}, r_{\prime k}\right\rangle} + b_{pq}\overbrace{\left\langle \hat{n}, \hat{n}\right\rangle}^{=1}\right) g^{qs} = b_{pq}\cdot g^{qs}$$

מבחן 2009-04-05

שאלה 1

הבעיה הזו עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.

ב. התבונן בעקומה

$$\alpha\left(t\right) = \left(8\cos t, 10 - 10\sin t, -6\cos t\right)$$

מצא פרמטר במהירות יחידה, s, של העקומה.

ג. חשב את העקמומיות של העקומה בחלק ב'.

פתרון

ב.

$$\alpha'(t) = (-8\sin t, -10\cos t, 6\sin t)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{64\sin^2 t + 100\cos^2 t + 36\sin^2 t} = \sqrt{100} = 10 \neq 1$$

$$s = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\,\mathrm{d}u = 10\cdot t \implies \boxed{t = \frac{s}{10}}$$

נציב ב-α:

$$\alpha(s) = \left(8\cos\frac{s}{10}, 10 - 10\sin\frac{s}{10}, -6\cos\frac{s}{10}\right)$$

עכשיו $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$

ג. במקרה של פרמטר טבעי, $\kappa = \|\alpha''(s)\|$[1]

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{8}{10}\sin\frac{s}{10}, -\cos\frac{s}{10}, \frac{6}{10}\sin\frac{s}{10}\right)$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{8}{100}\cos\frac{s}{10}, \frac{1}{100}\sin\frac{s}{10}, \frac{6}{100}\cos\frac{s}{10}\right)$$

$$\|\alpha''(s)\| = \sqrt{\frac{64}{10000}\cos^2\frac{s}{10} + \frac{1}{100}\sin^2\frac{s}{10} + \frac{36}{10000}\cos^2\frac{s}{10}} = \frac{1}{10} = \kappa$$

מבחן 2008-02-28

שאלה 2

נתון המשטח הבא ב-$\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| z = y^3\right\}$$

א. מהי עקמומיות גאוס K של M?

ב. הוכיחו שהקו $L = \left\{(x,y,z) = \mathbb{R}^3 \middle| y = z = 0\right\}$ הוא עקומה גיאודזית על M.

[1] במקרה של עקומות ב-$\mathbb{R}^3$ $\kappa \geq 0$, כלומר $\kappa = |\kappa|$. ב-$\mathbb{R}^2$ κ יכולה להיות שלילית - כלומר יכול להיות $\kappa \neq |\kappa|$.

פתרון

א. פרמטריזציה עבור M:

$$r\left(u,v\right)=\left(u,v,v^{3}\right)$$

$$r_{\prime 1}=\left(1,0,0\right)\qquad r_{\prime 2}=\left(0,1,3v^{2}\right)$$

$$G=\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+9v^{4}\end{pmatrix}\qquad G^{-1}=\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{1+9v^{4}}\end{pmatrix}$$

הנורמל:

$$\vec{n}=r_{\prime 1}\times r_{\prime 2}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{\kappa}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3v^{2}\end{vmatrix}=0\hat{\imath}-3v^{2}\hat{\jmath}+\hat{\kappa}=\left(0,-3v^{2},1\right)$$

הנורמל המנורמל:

$$\hat{n}=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+9v^{2}}}\left(0,-3v^{2},1\right)}$$

נגזרות שניות:

$$r_{\prime 11}=\left(0,0,0\right)\qquad r_{\prime 12}=r_{\prime 21}=\left(0,0,0\right)\qquad r_{\prime 22}=\left(0,0,6v\right)$$

מקדמי התבנית היסודית השניה:

$$b_{11}=\left\langle r_{\prime 11},\hat{n}\right\rangle=0\qquad b_{12}=b_{21}=0\qquad b_{22}=\frac{6v}{\sqrt{1+9v^{2}}}$$

(תזכורת: $G^{T}=G$, $\left(G^{-1}\right)^{T}=G^{-1}$, $B^{T}=B$ אבל ייתכן $S^{T}\neq S$)

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^{2}}}\end{pmatrix}\implies S=G^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{6v}{\left(1+9v^{4}\right)^{3/2}}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{K=\det S=0}$$

ב. צ"ל שהקו $L\left\{(x,y,z)|y=z=0\right\}$ גיאודזי. צריכים להסתכל על המשוואות הגיאודזיות:

$$\ddot{\gamma}^{k}+\Gamma_{ij}^{k}\dot{\gamma}^{i}\dot{\gamma}^{j}=0$$

נמצא את סימני כריספוטל:

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^{1} &= 0\\ \Gamma_{22}^{2} &= \frac{18v^{3}}{1+9v^{4}}\end{aligned}$$

המשוואות הגאודזיות בקואורדינטות $\begin{matrix}\gamma^1=u\\ \gamma^2=v\end{matrix}$:

$$\ddot{\gamma}^1+\cancel{\Gamma^1_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1}+\cancel{2\Gamma^1_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2}+\cancel{\Gamma^1_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2}=0$$

$$\ddot{\gamma}^2+\Gamma^2_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1+\Gamma^2_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2+\Gamma^2_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0$$

קיבלנו שתי משוואות:

$$\begin{cases}\ddot{\gamma}^1=0\\ \ddot{\gamma}^2+\frac{18v^3}{1+9v^4}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0\end{cases}$$

במונחים של u,v:

$$(*)\begin{cases}\ddot{u}=0\\ \ddot{v}+\frac{18v^3}{1+9v^4}\left(\dot{v}\right)^2=0\end{cases}$$

רוצים להראות שL מקיים את $(*)$. על L $\begin{matrix}y=0\\ z=0\end{matrix}$, כלומר $v=0$. ואם באמת $v=0$ המשוואה השניה היא נכונה. נשארים עם:

$$\ddot{u}=0$$

$$\ddot{u}=a$$

$$u\left(t\right)=at+b$$

כלומר עקומות מהסוג

$$\gamma\left(t\right)=\left(u\left(t\right),v\left(t\right),v\left(t\right)^3\right)$$

הם קווים גאודזיים. ניקח:

$$\gamma\left(t\right)=\left(at+b,0,0\right)$$

ואם ניקח למשל $a=1,b=0$ מקבלים ש$\gamma\left(t\right)=\left(t,0,0\right)$ היא קו גאודזי.

לחלופין

אפשר לנחש מלכתחילה פרמטריזציה $\gamma\left(t\right)=\left(t,0,0\right)$ ולראות שזה פותר את $(*)$

שאלה 3

נסתכל על מישור $\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$, כאשר הועא מצויד בתבנית היסודית הראשונה

$$(g_{ij})=e^{x+y}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

א. מצאו את סימני כריסטופל Γ^k_{ij}.

ב. האם הישר $y=x$ הוא עקומה גיאודזית?

ג. האם הישר $y=0$ הוא עקומה גיאודזית?

ד. האם הישר $x=1$ הוא עקומה גיאודזית?

פתרון

א.

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{11}&=\frac{1}{2}\\ \Gamma^1_{21}=\Gamma^1_{12}&=\frac{1}{2}\\ \Gamma^1_{22}&=-\frac{1}{2}\\ \Gamma^2_{11}&=-\frac{1}{2}\\ \Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}&=\frac{1}{2}\\ \Gamma^2_{22}&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

תזכורת: הקואורדינטות: $\begin{matrix}\gamma^1=x\\ \gamma^2=y\end{matrix}$. המשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases}\ddot{x}+\frac{1}{2}(\dot{x})^2+\dot{x}\dot{y}-\frac{1}{2}(\dot{y})^2=0\\ \ddot{y}-\frac{1}{2}(\dot{x})^2+\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}(\dot{y})^2=0\end{cases}$$

ב. $y=x$. נציב $x=y$.

$$\begin{cases}\ddot{x}+(\dot{x})^2=0\\ \ddot{x}+(\dot{x})^2=0\end{cases}$$

בעצם זה אותו מד"ר! נציב $\dot{x}=p$, ואז $\ddot{x}=\dot{p}$:

$$\dot{p}+p^2=0$$

$$\dot{p} = -p^2$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -p^2$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = -\mathrm{d}t \qquad / \int$$

$$-\frac{1}{p} = -t + c$$

$$\frac{1}{p} = t - c$$

$$p = \frac{1}{t-c}$$

אבל $p = \dot{x}$!

$$p = \dot{x} = \frac{1}{t-c}$$

$$\Longrightarrow x = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - c} = \ln|t-c| + a = y$$

נטען שהעקומה $\gamma(t) = (\ln|t-c| + a, \ln|t-c| + a)$ מקיימת את המשוואות הגאודזיות. נסתכל על $\dot{\gamma}^T(g_{ij})\dot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t-c} \\ \frac{1}{t-c} \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\ln|t-c|+2a} & 0 \\ 0 & e^{2\ln|t-c|+2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2a} \cdot |t-c|^2 & 0 \\ 0 & e^{2a} \cdot |t-c|^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}^T(g_{ij})\dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t-c} & \frac{1}{t-c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2a}(t-c)^2 & 0 \\ 0 & e^{2a}(t-c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t-c} \\ \frac{1}{t-c} \end{pmatrix} = 2e^{2a} = \mathrm{const}$$

הערה: להוכיח שהמהירות קבועה זה לא חלק מהתשובה!

ג. $\boxed{y = 0}$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}(\dot{y})^2 = 0 \\ \ddot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}(\dot{y})^2 = 0 \end{cases}$$

נציב $y = 0$ ונישאר רק עם x:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = 0 \\ -\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = 0 \implies \dot{x} = 0 \implies x = c_1 \end{cases}$$

$x = c_1$ פותר גם את המד"ר הראשונה.

"ננסה" $\begin{matrix} x = t \\ y = 0 \end{matrix}$ - ואז $\dot{x} = 1$. אבל $0 + \frac{1}{2}(1)^2 \neq 0$! לכן זה לא קו גאודזי.

ד. $x=1$

נציב במשוואות הגאודזיות $x=1$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\dot{y}\right)^{2}=0 \implies y=c_{2} \\ \ddot{y}+\frac{1}{2}\left(\dot{y}\right)^{2}=0 \end{cases}$$

אי אפשר לקבל את כל הישר $x=1$ באופן הזה, ולכן הישר $x=1$ אינו גאודזי - מקסימום נקודה בודדת.

מבחן 2010-02-26

שאלה 2

נניח שפרמטריזציה של משטח מקיימת $g_{12}=b_{12}=0$

ג. בטא מנה $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ לגבי משטח המתקבל כפונקציה של מקדמים של תבנית יסודית ראשונה ושנייה

פתרון

נתון:

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \qquad G^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{g_{11}} & 0 \\ & \frac{1}{g_{22}} \end{pmatrix}$$

$$S=G^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{b_{11}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{b_{22}}{g_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\kappa_1=\frac{b_{11}}{g_{11}} \qquad \kappa_2=\frac{b_{22}}{g_{22}}$$

$$\boxed{\frac{k_1}{k_2}=\frac{b_{11}g_{22}}{g_{11}b_{22}}}$$