פתרון תרגיל בית 12 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תש"ף

הוראות תרגיל זה לא להגשה, אך כולל חומר שצריך לדעת.

שאלה 1. (חימום) מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 12 עד כדי איזומורפיזם.

פתרון. פתרון: $12 = 2^2 \cdot 3$. לכן האפשרויות הן:

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$$

שאלה 2. מצאו סדרת הרכב של D_4. אפשר להעזר בסריג תת־החבורות של D_4 שפגשנו בתרגיל בית 7 כדי למצוא את כל סדרות ההרכב של D_4.

פתרון.

$$\{e\} \trianglelefteq \langle \sigma^2 \rangle \trianglelefteq \langle \sigma \rangle \trianglelefteq D_4$$

כל המנות איזומורפיות ל$\mathbb{Z}_2$ ולכן פשוטות. מכאן שזוהי סדרת הרכב.

שאלה 3. נתונות שש חבורות מסדר 54. זהו ונמקו אילו חבורות איזומורפיות זו לזו:

$$U_7 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times U_{18}, \quad \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_{54}$$

נסו למצוא איזומורפיזמים מפורשים בין חלק מהחבורות.

פתרון. נחשב $54 = 2 \cdot 3^3$. לכן יש $\rho(1)\rho(3) = 3$ חבורות אבליות מסדר 54, עד כדי איזומורפיזם.
ניזכר כי: $U_7 \cong \mathbb{Z}_6$ו $U_{18} \cong \mathbb{Z}_6$

$$\mathbb{Z}_{54} \cong \mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_2$$
$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{18} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_3 \cong U_7 \times \mathbb{Z}_9$$
$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times U_{18}$$

שאלה 4.

1. מצאו כמה חבורות אבליות יש מסדר $6!$, עד כדי איזומורפיזם.
2. לכמה מהחבורות האבליות מסדר $6!$ יש תת־חבורה 3-סילו ציקלית?

פתרון.

1. קל לחשב $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, ולכן יש $\rho(4)\rho(2) = 5 \cdot 2 = 10$ חבורות אבליות מסדר 720, עד כדי איזומורפיזם.
2. הרשימה המלאה של חבורות אבליות מסדר 720 היא

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{720} & \star \\ \mathbb{Z}_{2^4} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{240} & \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{360} & \star \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^3} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{120} & \\ \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{180} & \star \\ \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} & \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{180} & \star \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^2} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{60} & \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{3^2} \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{90} & \star \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{30} & \end{array}$$

תת־חבורת 3-סילו של חבורה מסדר 720 היא מסדר 9. בחבורות המסומנות $\star$ יש איבר מסדר 9, כי אפשר להציג אותן כאשר $\mathbb{Z}_9$ היא אחד מן הגורמים במכפלה הישרה. בפרט אלו הן החבורות שבהן תת־חבורת 3-סילו היא ציקלית. בחבורות האחרות, איברים מסדר 3^i "מגיעים" רק מהגורמים $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, ולכן תת־חבורת 3-סילו שלהן אינה ציקלית.

שאלה 5. רמז: $5! = 120$.

1. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 120 היא פתירה.
2. הוכיחו שכל חבורה מסדר 120 היא לא פשוטה. רמז: בדקו מתי $n_5 = m \neq 1$, הסתכלו על העתקה $G \to S_m$ והאם היא לתוך A_m.

פתרון.

1. הפרכה. נבחר את S_5 שאינה פתירה.
2. תהי G חבורה מסדר 120. הדוגמה בסעיף הקודם מראה שיתכן שכל תת־חבורות סילו שלה אינן נורמליות.
נניח בשלילה כי G פשוטה. אם $n_5 = 1$, אז G אינה פשוטה. אז $n_5 = 6$ (כל שאר המחלקים של 120 לא משאירים שארית 1 בחלוקה ב-5), ויש שיכון $\varphi\colon G \to S_6$. נשים לב כי $\varphi(G) \cap A_6 \lhd \varphi(G)$ ואז פוסלים את האפשרות שיש רק איברים מסדר 2 (כי $3|120$), ואז $\varphi(G) \leq A_6$. אבל אז $[A_6 : \varphi(G)] = 3 < 6$ וזו סתירה לתרגיל שראינו.

שאלה 6. רמז: $5778 = 2 \cdot 3^3 \cdot 107$.

1. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 5778 היא פתירה.

2. הוכיחו שכל חבורה מסדר 5778 היא לא פשוטה.

פתרון.

1. הוכחה. תהי G חבורה מסדר 5778. לפי סילו נחשב ש-$n_{107}=1$. אם $Q\leq G$ היא תת־חבורת 107-סילו, אז היא נורמלית ומספיק להראות כי Q ו-${}^{G}/_{Q}$ הן פתירות. מפני ש-$|Q|=107$, אז היא ציקלית ולכן בודאי פתירה. עבור ${}^{G}/_{Q}$ נשים לב שהיא מסדר $2\cdot 3^3$ ולכן אם ${}^{P}/_{Q}\leq {}^{G}/_{Q}$ היא תת־חבורת 3-סילו, אז היא מאינדקס 2, ולכן נורמלית. כעת נשארו עם חבורות-p שהן תמיד פתירות.

2. תהי G חבורה מסדר 5778. בסעיף הקודם ראינו כי $n_{107}=1$ ולכן יש לה תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

שאלה 7. תהי $G=D_5\times U_7$.

1. מצאו את תת־חבורת הקומוטטור G'.

2. האבליניזציה $\overline{G}={}^{G}/_{G'}$ היא חבורה אבלית סופית. מצאו את הצורה הקנונית שלה, כלומר מצאו מספרים d_i כך ש-$\overline{G}\cong\mathbb{Z}_{d_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{d_n}$ כאשר $d_i|d_{i+1}$.

פתרון.

1. תהינה A,B חבורות. נשים לב כי עבור $a_1,a_2\in A$ ו-$b_1,b_2\in B$ מתקיים ש-

$$[(a_1,b_1),(a_2,b_2)]=([a_1,a_2],[b_1,b_2])$$

ולכן $(A\times B)'=A'\times B'$. אצלנו $B=U_7$ היא אבלית, ולכן $U_7'=\{1\}$. עבור $A=D_5$, ברור כי $D_5'\neq\{\mathrm{id}\}$ מפני ש-D_5 לא אבלית. ניקח שני איברים $\tau\sigma^i,\tau\sigma^j\in D_5$ ונחשב

$$\left[\tau\sigma^i,\tau\sigma^j\right]=\tau\sigma^i\tau\sigma^j\left(\tau\sigma^i\right)^{-1}\left(\tau\sigma^j\right)^{-1}=\tau\sigma^i\tau\sigma^j\sigma^{-i}\tau\sigma^{-j}\tau=\tau\tau\sigma^{-i}\sigma^j\sigma^{-i}\sigma^j\tau\tau=\sigma^{2j-2i}$$

אם נבחר $i=0$, $j=1$, אזי קיבלנו כי $\sigma^2\in D_5'$. לכן $\langle\sigma^2\rangle=\langle\sigma\rangle\leq D_5'$. אפשר להראות ישירות כי אין אף שיקוף (איבר מן הצורה $\tau\sigma^i$) ב-D_5'. דרך אחרת היא לשים לב כי $\langle\sigma\rangle\lhd D_5$, ושחבורת המנה ${}^{D_5}/_{\langle\sigma\rangle}$ היא מסדר 2, ולכן אבלית. נסיק כי $D_5'\leq\langle\sigma\rangle$ ומפני ש-D_5 לא אבלית, אז $D_5'\neq\{\mathrm{id}\}$. בסך הכל קיבלנו כי $D_5'=\langle\sigma\rangle$. לכן

$$G'=D_5'\times U_7'=\langle\sigma\rangle\times\{1\}\cong\mathbb{Z}_5$$

2. הסדר של $\overline{G}$ הוא

$$\left|\overline{G}\right|=\left|{}^{G}/_{G'}\right|=\frac{|G|}{|G'|}=\frac{10\cdot 6}{5}=12$$

יש בסך הכל שתי חבורות אבליות מסדר 12 עד כדי איזומורפיזם, והן $\mathbb{Z}_{12}$ ו-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$. האם אתם יכולים להראות כי $\overline{G}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$? העזרו בכך ש-$U_7$ היא חבורה אבלית מסדר 6 ולכן $U_7\cong\mathbb{Z}_6$ וש-$\overline{D_5}\cong\mathbb{Z}_2$.

שאלה 8. תהי $\mathcal{V}$ המחלקה של כל החבורות הפתירות.
רשות: אפשר לפתור את השאלה גם עבור המחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות.

1. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתת־חבורות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $H \leq G$ גם $H \in \mathcal{V}$.
2. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה לתמונות הומומורפיות. כלומר אם $G \in \mathcal{V}$, אז לכל $K \lhd G$ גם $G/K \in \mathcal{V}$.
3. הוכיחו כי $\mathcal{V}$ סגורה למכפלה ישרה סופית. כלומר אם $G, H \in \mathcal{V}$, אז גם $G \times H \in \mathcal{V}$.

פתרון.

1. תהי

$$\{e\} = G_n \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_1 = G$$

סדרה תת נורמלית של G עם מנות אבליות. נסתכל על

$$\{e\} = H_n \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq ... \trianglelefteq H_1 = H$$

כאשר לכל i, $H_i = G_i \cap H$. קל לראות שזאת אכן תת סדרה נורמלית, כי לכל i, $G_{i+1} \cap H \trianglelefteq G_i \cap H$. כמו כן, יש שיכון טבעי

$$(G_i \cap H)/(G_{i+1} \cap H) \hookrightarrow G_i/G_{i+1}$$

ולכן המנות אבליות.

2. תהי

$$\{e\} = G_n \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_1 = G$$

סדרה תת נורמלית של G עם מנות אבליות. נסתכל על

$$\{e\} = (G_nK)/K \trianglelefteq (G_{n-1}K)/K \trianglelefteq ... \trianglelefteq (G_1K)/K = G/K$$

.

קל לראות שלכל i $(G_{i+1}K)/K \trianglelefteq (G_iK)/K$, ולכן זאת סדרה תת נורמלית. כמו כן,

3. נסתכל על תת החבורה $G \times \{0\}$. מתקיים ש$G \times \{0\} \trianglelefteq G \times H$. לכן מספיק להוכיח ש$G \times \{0\}$ פתירה, ו$(G \times H)/(G \times \{0\})$ פתירה. אבל $G \cong G \times \{0\}$ ו$(G \times H)/(G \times \{0\}) \cong H$, ונתון ששתיהן פתירות.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 9. הוכיחו שאם לשתי חבורות אבליות סופיות יש את אותו מספר איברים מכל סדר, אז הן איזומורפיות.
רמז: למעשה צריך להראות שמספר האיברים מכל סדר קובע באופן יחיד חבורה אבלית סופית. התבוננו בצורה הקנונית של חבורה אבלית, או העזרו בתת־חבורות סילו שלה.

שאלה 10. תהי G חבורה פתירה. נגדיר את דרגת הפתירות של G להיות המספר $t \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G^{(t)} = \{e\}$.
באופן דומה מגדירים לחבורה נילפוטנטית את דרגת הנילפוטנטיות שלה להיות המספר $c \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך ש-$G_c = \{e\}$ (האיבר ה-c בסדרה המרכזית היורדת).
לדוגמה, חבורה מדרגת פתירות 1 או דרגת נילפוטנטיות 1 היא אבלית, כי $G_1 = \{e\} = G^{(1)}$.

1. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הפתירות של D_n היא 2.
2. הוכיחו כי לכל $n \geq 3$ דרגת הנילפוטנטיות של D_{2^n} היא $n-1$.
3. הראו שהמחלקה של כל החבורות הנילפוטנטיות לא סגורה למכפלה ישרה אינסופית.