בתרגול הקודם:

- דיברנו על שגיאת קלט ושגיאה מתפשטת.
- דיברנו על מספר מצב - מדד לכמה הפונקציה רגישה לשינויים בקלט.
- הכללנו את המושג אורך לנורמה

פתרון של משוואות לא ליניאריות

נניח שיש פונקציה $f\left(x\right)$, ורוצים למצוא את השורשים שלה - כלומר את הxים שעבורם $f\left(x\right)=0$.

עבור פונקציות כמו $f\left(x\right)=x^{2}-5x+6$ זה קל - יש נוסחת שורשים. אבל עבור פונקציות כמו $f\left(x\right)=e^{2x}-x\cdot\cos^{2}x$ אין נוסחה מסודרת. צריך לבצע חיפוש לפתרונות.

משפט ערך הביניים

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$.

אם מתקיים $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<1$ $\Leftarrow$ קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש$f\left(x\right)=0$.

שיטת Bisection

1. בחר קטע $[x_{0},x_{1}]$ כך שמתקיים $f\left(x_{0}\right)\cdot f\left(x_{1}\right)<0$
2. $x_{2}=\dfrac{x_{0}+x_{1}}{2}$
3. אם $f\left(x_{2}\right)=0$!
4. אם $f\left(x_{2}\right)\cdot f\left(x_{0}\right)<0$ אז נמשיך בקטע $[x_{0},x_{2}]$
5. אחרת נמשיך בקטע $[x_{2},x_{1}]$

תנאי עצירה

1. $|f\left(x_{2}\right)|<\epsilon$
2. $|x_{1}-x_{0}|<\delta$
3. $k>N$ כאשר k=מספר האיטרציות

תמיד רצים עם שלושת התנאים. ברגע שלפחות אחד מהם מתקיים - עוצרים.

מהירות ההתכנסות

בכל איטרציה החסם של המרחק מהשורש הוא חצי מהחסם על המרחק הקודם.
באופן כללי, אם היחס בין החסם על הקירוב חסום על ידי קבוע, הקבוע הזה נקרא "קצב התכנסות". למשל במקרה של שיטת החציה:

$$\frac{|z-x_{k+1}|}{|z-x_k|} \leq C = 0.5$$

אבל לא תמיד זה קבוע. נרצה מדד יותר טוב:

הגדרה

עבור סדרת קירובים $x_1, x_2, \ldots$ המתכנסת לשורש z, אם קיימים $p \geq 0$ וגם $C \geq 0$ כך שמתקיים

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z-x_{k+1}|}{|z-x_k|^p} \leq C$$

אזי:

- C - שיעור ההתכנסות
- p - סדר ההתכנסות

עבור $p=1$ מקבלים התכנסות לינארית. עבור $p=2$ מקבלים התכנסות ריבועית. עבור $1<p<2$ מקבלים התכנסות סופר־לינארית.

דוגמה

נרצה לבצע חישוב של $\sqrt{7}$.
נרצה למצוא פונקציה שאחד השורשים שלה הוא $\sqrt{7}$. אז נבצע חיפוש על הפונקציה, ונקבל את השורש הרצוי - $\sqrt{7}$.
הפונקציה $f(x) = x - \sqrt{7}$ לא טובה, כי כדי לחשב אותה צריך לדעת מה הערך של $\sqrt{7}$. לכן נבחר את הפונקציה $f(x) = x^2 - 7$.
אנחנו צריכים אינטרוול התחלתי. שיהיה מספיק קטן. נבחר $\left[\sqrt{4}, \sqrt{9}\right] = [2,3]$. נבדוק שזה מתאים:

$$f(2) = -3 \qquad f(3) = 2$$

נחשב:

$$\begin{array}{c} x_0 = 2 \\ x_0 = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_2 = \dfrac{2+3}{2} = 2.5 \\ f(x_2) = -0.75 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_0 = 2.5 \\ x_1 = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_2 = \dfrac{2.5+5}{2} = 2.75 \\ f(x_2) = 0.5625 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x_0 = 2.5 \\ x_1 = 2.75 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_2 = 2.625 \\ f(x_2) = -0.109 \end{array}$$

וכן הלאה - תוך 5 איטרציות מגיעים לקירוב הטוב 2.65

שיטת Begula-Fals

האלגוריתם דומה לBisection, אבל בוחרים את x_2 באופן שונה. מעבירים מיתר בין $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ ל$\begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$, ונקודת החיתוך שלה עם ציר ה x תהיה הx_2.
נשתמש במשוואת הישר כדי לחשב את x_2:

$$y = mx + n$$

$$mx + n = 0$$

$$x = -\frac{n}{m}$$

$$\boxed{m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$f(x_n) = mx_1 + n$$

$$\boxed{n = f(x_1) - mx_1}$$

$$x_2 = -\frac{n}{m} = -\frac{f(x_1) - mx_1}{m} = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{1}{m}$$

$$\boxed{x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_2)}}$$

כל שאר האלגוריתם זהה לחלוטין.

שיטת הSecant

$$x_{n+1} = x_n - f(x_0) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

אם בוחרים את x_0, x_1 בצורה חכמה, אפשר פשוט להפעיל את הנוסחה שוב ושוב.

כדי לבחור את x_0, x_1, נרצה לדעת מי מהם יותר קרוב לשורש ־ על ציר הy, כי אנחנו לא יודעים איפה השורש נמצא על ציר הx. רוצים שיתקיים

$$\left|f\left(x_1\right)\right| \overset{?}{\leq} \left|f\left(x_0\right)\right|$$

סדר ההתכנסות של שיטת הSecant הוא סופר־לינארי

שיטת ניוטון־רפסון

הרעיון של ניוטון הוא לא להעביר מיתר, אלא להעביר משיק:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$

יש לשיטה הזו מספר יתרונות:

- בניגוד לשיטות הקודמות, כאן כדי לקבל את הנקודה הבאה מספיק לזכור נקודה אחת אחורה.
- השיטה הזו מאוד מהירה.
- ניתן להכליל אותה למספר מימדים.

לשיטה הזו יש גם חסרונות:

- למחשב קשה מאוד לגזור
- הנגזרת עלולה להיות 0 או קרובה ל0

מהירות ההתכנסות

$$f\left(x\right) = x^2 - 7$$

$$f'\left(x\right) = 2x$$

$$x_1 = 3 - \frac{f\left(3\right)}{f'\left(3\right)} = 3 - \frac{2}{6} = 2.6667$$

$$x_2 = 2.6667 - \frac{f\left(2.6667\right)}{f'\left(2.6667\right)} \approx 2.6458$$

$$x_3 = 2.6458 - \frac{f\left(2.6458\right)}{f'\left(2.6458\right)} \approx 2.6457$$

קיבלנו התכנסות טובה מאוד מהר

שיטות נקודות שבת Fixed Point

עבור $f(x)=0$ נרצה למצוא פונקציה g המקיימת $x=g(x)$ כאשר $f(x)=0$. לאחר שמצאנו פונקציה כזו, נעשה שוב ושוב $x_{n+1}=g(x_n)$.

דוגמה

$$x^5-x\cdot e^x+\sin x=0$$

$$x\left(x^4-e^x\right)=-\sin x$$

$$x_{n+1}=-\frac{\sin x_n}{x_n^4-e^{x_n}}$$

אבל מי אמר שזה בכלל מתכנס?

משפט

אם $|g'(x)|<1$ בסביבת הפתרון, אז הפונקציה g תיתן התכנסות יציבה.
אם $|g'(x)|>1$ בסביבת הפתרון, לא יודעים מה הולך לקרות.

תרגיל

עבור הפונקציה $f(X)=x+\ln x$, $z\approx 0.5$, מוצעות מספר נוסחאות:

1. $x_{n+1}=-\ln x_n$
2. $x_{n+1}=e^{-x_n}$
3. $x_{n+1}=\frac{x_n+e^{-x_n}}{2}$

באיזה נוסחאות אפשר להשתמש(התכנסות וודאית?) ובאילו כדאי להשתמש(התכסנות וודאית ומהירה).

פתרון

$$g_1'(x)=-\frac{1}{x},g_1'(z)\approx 2>1$$

ולכן ההתכסנות לא וודאית.

$$g_2'\left(x\right)=-e^{-x},\left|g_2'\left(z\right)\right|\approx 0.6<1$$

ולכן ההתכנסות וודאית.

$$g_3'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-x}\right)=\left|g'\left(z\right)\right|\approx 0.2<1$$

ולכן גם כאן ההתכנסות וודאית.

כדאי להשתמש בg_3, כי שם השיפוע יותר קטן, ולכן נגיע יותר מהר לנקודת החיתוך.