אתר הקורס: `/~kopelot/algo2`

- תזכורת: עבור RMQ היה לנו:

עיבוד מקדים: $O(n\log n)$
שאילתא: $O(1)$

$RMQ\pm 1$

נחלק את המערך A ל$\frac{2n}{\log n}$ מערכים שכל אחד מהם בגודל $\frac{\log n}{2}$. נרכיב A' באורך $\frac{2n}{\log n}$.
כל תא מכיל מינימום בטווח הi בגודל $\frac{\log n}{2}$ במערך A.

1. אם השאילתא על כמה בלוקים, בעזרת עיבוד מקדים(RMQ) על A':

$$O\left(\frac{2n}{\log n}\log\left(\frac{2n}{\log n}\right)\right)=O(n)$$

2. אם השאילתה על יותר מבלוק אחד אבל לא מתאימה לטווח של בלוקים שלמים, אז בעזרת הסעיף הקודם אפשר לחשב את המינימום של החלק הפנימי(שמתאים לבלוקים שלמים), אבל צריך לטפל גם ברישא/סיפא של בלוק. נחשב מינימום לכל רישא. כל רישא אפשר לחשב לפי הרישא הקודמת ב$O(1)$, ולכן סה"כ - $O(n)$ זמן. כנ"ל לגבי הסיפא.

3. אם השאילתה על חלק מבלוק(שלא רישא או סיפא), נשתמש בשיטת lookup table.
נסתכל לדוגמה על שני בלוקים:

$$\begin{matrix}2&3&2&1&2&3&4&5&4&3\\6&7&6&5&6&7&8&9&8&7\end{matrix}$$

נראה שלמעשה מדובר באותה פונקציה עם הזחה - ולכן המינימום נמצא באותו מקום. סה"כ מספר האפשרויות לפונקציות(בכל בלוק) הוא $\sqrt{n}=2^{\frac{\log n}{2}}$. לכן תהיה לנו טבלה עם המינימומים של כל הפונקציות האפשריות. לכל בלוק ניתן לבדוק ב$O\left(\frac{\log n}{2}\right)$ לאיזה פונקציה הוא מתאים באמצעות מיפוי: נבנה מספר בינארי ע"י כך שנסמן עלייה ב1 וירידה ב0, למשל $\begin{matrix}2&3&2&1&2&3&4&5&4&3\\&1&0&0&1&1&1&1&0&0\end{matrix}$.

בשימוש באלגוריתם למקרה הכללי(RMQ): עיבוד מקדים לבלוק בזמן $O(\log n\log\log n)$ ושאילתא בזמן $O(1)$. סה"כ: $O(\sqrt{n}\cdot\log n\cdot\log n\log n)<O(n)$.

עצים הומאומורפים

משפט

יהיו T_1,T_2 עצים על אותם $n\geq 4$ עלים, העצים המושרים על כל 4 עלים הם הומאומורפים אם"ם T_1 וT_2 הם הומאומורפים.

הוכחה

$\Longrightarrow$ ברור: אם T_1, T_2 הומאומורפים, בפרט כל 4 עלים שלהם הומאומורפים.

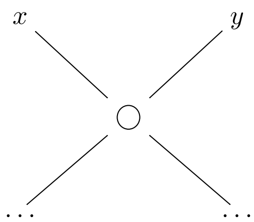
$\Longleftarrow$ **הגדרה:** 2 עלים יקראו תאומים אם על המסלול ביניהם קיים קודקוד יחיד עם דרגה≥ 3.

תרגיל לבית: הוכיחו שלכל עץ עם $4 \leq n$ עלים קיימים עלים תאומים.

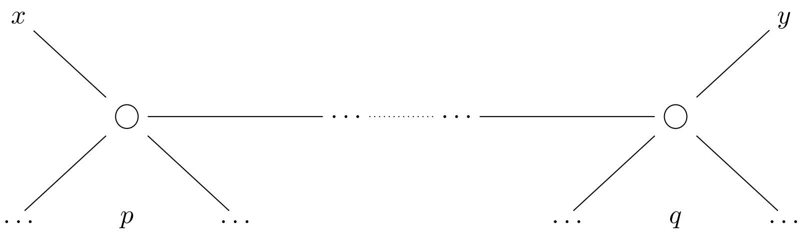
טענה: יהיו x, y תאומים בT_1. אזי x, y תאומים בT_2.

הוכחה: נניח בשלילה שx, y אינם תאומים בT_2. העצים נראים כך:

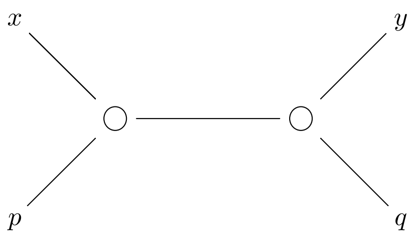
T_1



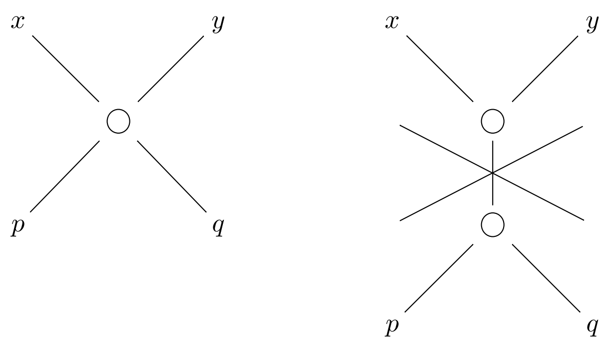
T_2



T_2 על x, y, p, q הוא:



ל-T_1 על x, y, p, q יש שתי אפשרויות:



סתירה לכך שכל רביעיה היא הומאומורפית.

■

הוכחה באינדוקציה: ניקח את x ו-y תאומים ב-T_1 ו-T_2 - ונוריד אותם.