21.7.2021

יחסי סדר

1. הגדרה (היחס ההפוך). יהא R יחס בין A ל B ($R \subseteq A \times B$). היחס ההפוך, מסומן R^{-1}, הוא יחס מ B ל A (כלומר, ת"ק של $B \times A$) ומוגדר

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

למשל אם

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,1),(3,1)\}$$

אז

$$R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(1,1),(1,3)\}$$

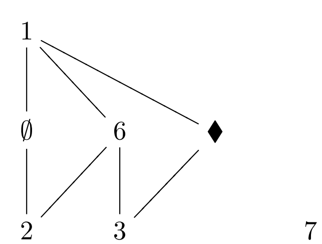
2. תרגיל: תהא A קבוצה ו R יחס סדר עליה (כלומר (A,R) קבוצה סדורה חלקית - קס"ח). הוכיחו כי R^{-1} גם יחס סדר על A.
הוכחה:

(א) רפלקסיביות: צ"ל לכל $a \in A$ מתקיים $(a,a) \in R^{-1}$.
הוכחה: יהא $a \in A$, כיוון ש R יחס סדר חלקי, בפרט רפלקסיבי, נקבל ש $(a,a) \in R$ ולכן $(a,a) \in R^{-1}$

(ב) אנטי-סימטריות: יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש $(a_1,a_2) \in R^{-1}$ וגם $(a_2,a_1) \in R^{-1}$ צ"ל $a_1 = a_2$.
הוכחה: מהנתון, נקבל ש $(a_2,a_1) \in R$ וגם $(a_1,a_2) \in R$ומכיוון ש R אנטי סימטרי (כיוון שהוא יחס סדר) נקבל כי $a_1 = a_2$ כמבוקש.

(ג) טרנזיטיביות: יהיו $a_1, a_2, a_3 \in A$ כך ש $(a_1,a_2) \in R^{-1}$ וגם $(a_2,a_3) \in R^{-1}$ צ"ל $(a_1,a_3) \in R^{-1}$.
הוכחה: מהנתון, נקבל ש $(a_2,a_1) \in R$ וגם $(a_3,a_2) \in R$ומכיוון ש R טרנזיטיבי (כיוון שהוא יחס סדר) נקבל כי $(a_3,a_1) \in R$ ולכן $(a_1,a_3) \in R^{-1}$ כמבוקש.

3. ציור, איברים מינמאלי, מקס', $\sup, \inf$



ביחס זה מתקיים:

ביחס זה: $2,3$ מינמאלים. 1 מקסימלי. 7 הוא מקסימאלי ומינימאלי.

עבור תת הקבוצה $B=\{\emptyset,6,\blacklozenge\}$. האם קיים $\sup B, \inf B$?

תשובה: $\sup B = 1$ (כי 1 גדול שווה מכל איברי B, כלומר הוא חסם מלעיל של B. ובנוסף, הוא הכי קטן עם תכונה זאת.)

אין $\inf B$ כי אין חסמי מלרע לקבוצה B.

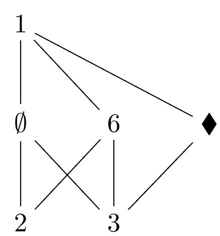
עבור $C=\{2,6,3\}$ האם קיים $\sup B, \inf B$?

פתרון: חסמי המלעיל של C הם $\{1,6\}$ וכיוון ש 6 קטן שווה מ 1 נקבל כי

$$\sup C = 6$$

חסמי מלרע - אין ובפרט לא קיים $\inf C$.

4. ביחס המתואר ב



עבור תת הקבוצה $B=\{2,3\}$. האם קיים $\sup B$?

פתרון: חסמי המלעיל של B הם $\{1,6,\emptyset\}$ובקבוצה זאת אין איבר קטן ביותר ולכן לא קיים $\sup B$.

5. תרגיל: תהא (A,R) קס"ח ויהא $x \in A$. הוכיחו שאם x מינמאלי ב (A,R) אז x מקסימאלי ב $\left(A,R^{-1}\right)$.

הוכחה: נניח ש x מינמאלי ב (A,R). צ"ל x מקסימאלי ב $\left(A,R^{-1}\right)$.

נניח $a \in A$ מקיים כי $(x,a) \in R^{-1}$ וצ"ל $a = x$.

כיוון ש $(x,a) \in R^{-1}$ נקבל ש $(a,x) \in R$ ומכיוון ש x מינמאלי ב (A,R) נקבל כי $a = x$ כנדרש.

6. האם אתם מבינים את המשפט: "שרה שרה שיר שמח"? כן! הקשר!!!!

7. סימונים ליחסי סדר(מקובלים): דבר ראשון עבור יחס סדר R (או יחס בכללי) מסמנים aRb עבור $(a,b) \in R$.

דבר שני - מקובל לסמן יחסי סדר ב $\leq$. כלומר, אתם יכולים לראות תרגילים/הגדרות שמתחילות "יהא $(A,\leq)$ קס"ח" (לעומת זאת, נתבונן ביחס $(\mathbb{N},\leq)$ אז כנראה שזה הקטן שווה "הרגיל"). תראו דבר יפה - הגדרת איבר מינמאלי יותר נעימה לעין:

הגדרה (איבר מינמאלי): יהא $(A,\leq)$ קס"ח. איבר $x\in A$ יקרא איבר מינימאלי אם:

$$\forall a\in A:\ (a\leq x)\Rightarrow (a=x)$$

8. תרגיל: הוכיחו כי בכל קס"ח $(A,\leq)$ סופית לא ריקה, יש איבר מינימאלי.
הוכחה: בהרצאה (אם לא - תוכיחו לבד).

9. הוכיחו/הפריכו: אם x מקסמאלי יחיד אז x גדול ביותר.
פתרון: בהרצאה. למשל, ארז, נתן את הדוגמה: הקבוצה

$$\{3\}\cup\{2^n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$$

עם היחס "מחלק את". מפורשות היחס הוא הקבוצה

$$\{(2^n,2^m)\,|\,n\leq m\}\cup\{(3,3)\}$$

. אזי 3 מקסמאלי יחיד אבל לא גדול ביותר.
הערה: ביחס ההפוך, שכתיבתו המפורשת היא

$$\{(2^m,2^n)\,|\,n\leq m\}\cup\{(3,3)\}$$

נקבל ש 3 מינמאלי יחיד שאינו קטן ביותר.

10. יהא $(A,\leq)$ קס"ח משווה/מלא/לינארי/קווי (כלומר, לכל $a_1,a_2\in A$ מתקיים $a_1\leq a_2$ או $a_2\leq a_1$).
הוכיחו/הפריכו: אם x מינמאלי אז x קטן ביותר. (ראינו ביחס במספר 3 איברים מינמאלים שאינם קטנים ביותר).
פתרון: הוכחה: נניח x מינימאלי צ"ל x קטן ביותר.
יהא $a\in A$ וצ"ל $x\leq a$. כיוון שזהו יחס סדר משווה/מלא נקבל ש $x\leq a$ או $a\leq x$.
אם $x\leq a$ סיימנו.
אחרת $a\leq x$ ומכיוו ו xמינמאלי נקבל ש $a=x$ ובפרט $x\leq a$ ($a\leq a$) וסיימנו.

11. תהא $(A\leq)$קס"ח. נניח $x\in A$ מינמאלי יחיד ו $y\in A$ מקס' יחיד. הוכיחו/הפריכו: $x\leq y$.
הפרכה: $A=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ויחס הסדר

$$\{(m,n)\,|\,(m,n\in\mathbb{N})\wedge(m\leq n)\}\cup\{(-s,-t)\,|\,(s,t\in\mathbb{N})\wedge(-s\leq -t)\}$$

מתקיים ש 1 הוא מינמאלי יחיד, -1 הוא מקס' יחיד אבל אין יחס בין 1 ל -1(כלומר $(1,-1)\,,(-1,1)$שניהם לא ביחס).

כדאי לצייר את היחס בשביל להבין טוב יותר, אפשר לראות בהקלטה (אם אתם מוצאים אותה).

12. תהא $(A, \leq)$ קס"ח ו B ת"ק של A שקיים לה sup. הוכיחו/הפריכו: לכל תת קבוצה של B יש sup

13. תהא X סדרת הסדרות הבינאריות ונגדיר יחס $\leq$ בצורה הבאה:

$$a \leq b \iff \forall n: \ a_n - b_n \neq (-1)^n$$

(הערה: סדרה בינארית היא $a_1 a_2 a_3, \ldots$ כאשר לכל n טבעי $a_n \in \{0,1\}$). למשל הסדרה

$$a = 010010000000\ldots$$

והסדרה

$$b = 10001111\ldots$$

האם $a \leq b$? לא כי

$$a_1 - b_1 = 0 - 1 = -1$$

ולכן $a \not\leq b$.
האם $b \leq a$? לא

$$b_1 - a_1 = 1 - 0 \neq (-1)^1$$
$$b_2 - a_2 = 0 - 1 \neq (-1)^2$$
$$b_3 - a_3 = 0 - 0 \neq (-1)^3$$
$$\vdots$$
$$b_6 - a_6 = 1 - 0 = (-1)^6$$

ולכן $b \not\leq a$.
לפני שנפתור - טענה: $a \leq b$ אמ"מ
(לכל n זוגי מתקיים $a_n - b_n \neq 1$ וגם לכל n א"ז מתקיים $(a_n - b_n \neq (-1)$ אמ"מ
(לכל n זוגי מתקיים אם $a_n = 1$ אז $b_n = 1$
וגם
לכל n א"ז מתקיים אם $a_n = 0$ אז $b_n = 0$)

כלומר: $a \le b$ אמ"מ לכל k טבעי מתקיים

$$(a_{2k} = 1) \Rightarrow (b_{2k} = 1)$$
$$(a_{2k-1} = 0) \Rightarrow (b_{2k-1} = 0)$$

(א) הוכיחו שזה יחס סדר.

הוכחה:

- רפלקסיביות: יהא $a \in X$ (סדרה בינארית) צ"ל $a \le a$. אכן, לכל n טבעי מתקיים ש

  $$a_n - a_n = 0 \neq (-1)^n$$

  ולכן $a \le a$.

- אנטי- סימטריות: יהיו $a, b \in X$ כך ש $a \le b$ וגם $b \le a$ צ"ל $a = b$.

  הוכחה: לפי האיפיון השקול, נקבל כי

  (בגלל $a \le b$) לכל k טבעי מתקיים

  $$(a_{2k} = 1) \Rightarrow (b_{2k} = 1)$$
  $$(a_{2k-1} = 0) \Rightarrow (b_{2k-1} = 0)$$

  וגם (בגלל $b \le a$) לכל k טבעי מתקיים

  $$(b_{2k} = 1) \Rightarrow (a_{2k} = 1)$$
  $$(b_{2k-1} = 0) \Rightarrow (a_{2k-1} = 0)$$

  ולכן, לכל k טבעי מתקיים

  $$(a_{2k} = 1) \iff (b_{2k} = 1)$$
  $$(a_{2k-1} = 0) \iff (b_{2k-1} = 0)$$

  כלומר $a = b$.

  מוזמנים לנסות להוכיח זאת ישירות מההגדרה שנתונה בשאלה (בלי האפיון השקול).

- טרנזיטיביות: יהיו $a, b, c \in X$ ונניח $a \le b$ וגם $b \le c$ צ"ל ש $a \le c$.

  הוכחה: לפי ההנחה (והאיפיון השקול) לכל k טבעי מתקיים

  $$(a_{2k} = 1) \Rightarrow (b_{2k} = 1)$$
  $$(a_{2k-1} = 0) \Rightarrow (b_{2k-1} = 0)$$

וגם לכל s טבעי מתקיים

$$(b_{2s}=1) \Rightarrow (c_{2s}=1)$$
$$(b_{2s-1}=0) \Rightarrow (c_{2s-1}=0)$$

ולכן לכל k טבעי מתקיים

$$(a_{2k}=1) \Rightarrow (b_{2k}=1) \Rightarrow (c_{2k}=1)$$
$$(a_{2k-1}=0) \Rightarrow (b_{2k-1}=0) \Rightarrow (c_{2k-1}=0)$$

ולכן לכל k טבעי מתקיים

$$(a_{2k}=1) \Rightarrow (c_{2k}=1)$$
$$(a_{2k-1}=0) \Rightarrow (c_{2k-1}=0)$$

ולכן $a \leq c$.

(ב) האם הוא משווה/מלא:

פתרון: לא. למשל a, b מהדוגמה בראשית התרגיל.

(ג) מצאו איבר קטן/גדול ביותר, אם קיימים.

פתרון: יש גם איבר קטן ביותר וגם גדול ביותר.

טענה $m = 101010101010\ldots$ היא איבר קטן ביותר.

הוכחה: יהא $b \in X$ וצ"ל $m \leq b$. כלומר, צ"ל שלכל n טבעי מתקיים $m_n - b_n \neq (-1)^n$.

יהא n טבעי. צ"ל $m_n - b_n \neq (-1)^n$. לפי הגדרת m נקבל כי:

אם n זוגי

$$m_n - b_n = 0 - b_n \in \{0, -1\}$$

בפרט $m_n - b_n \neq 1 = (-1)^n$

אם n אי-זוגי

$$m_n - b_n = 1 - b_n \in \{0, 1\}$$

בפרט $m_n - b_n \neq -1 = (-1)^n$.

באופן דומה $M = 0101010101\ldots$ הוא האיבר הגדול ביותר.הוכחה: יהא $a \in X$ צ"ל $a \leq M$ כלומר צ"ל שלכל n טבעי מתקיים

$$a_n - M_n \neq (-1)^n$$

אכן: עבור n אי זוגי

$$a_n - M_n = a_n - 0 \neq (-1)$$

ועבור n זוגי

$$a_n - M_n = a_n - 1 \neq 1$$

14. יהא A קבוצה. נגדיר $\mathbb{O}$ את קבוצת כל יחסי הסדר על A.

(א) יהא R יחס סדר על A. הוכיחו שאם R יחס סדר משווה על A אז R הוא איבר מקסמלי ב $(\mathbb{O}, \subseteq)$.

(ב) הוכיחו: אם $|A| \geq 2$ אז אין איבר גדול ביותר ב $(\mathbb{O}, \subseteq)$

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל קבוצה לא ריקה $B \subseteq \mathbb{O}$ קיים $\inf$

(ד) הוכיחו/הפריכו: לכל קבוצה לא ריקה $B \subseteq \mathbb{O}$ קיים $\sup$