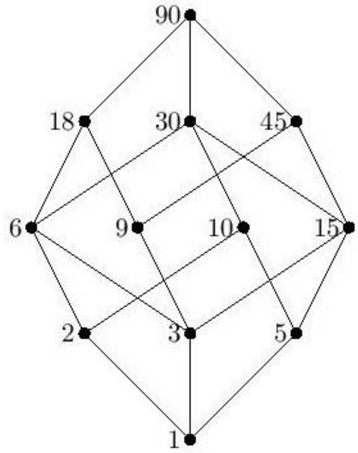
מתמטיקה בדידה 195-88 תשע"ד

שיעורי בית מספר 6

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדבח

1. ציירו את דיאגרמת הסה של שריג המחלקים של 90.



2. ניזכר בהגדרת יחס השקילות $R_B := \{(C_1,C_2) : C_1 \cap B = C_2 \cap B\}$.

תהי A קבוצה, נגדיר: $X := \{R_B : B \subseteq A\}$.

נגדיר על X את יחס הסדר הכלה, כלומר נביט בקס"ח $(X,\subseteq)$.

הוכיחו: X הוא שריג (רמז: היעזרו בתרגיל המודרך, תרגיל 5).

לפי טענה 4 בתרגיל 5, לכל $B_1,B_2 \subseteq A$ מתקיים: $R_{B_1\cup B_2} = R_{B_1} \cap R_{B_2}$ וגם $R_{B_1\cap B_2} = tc(R_{B_1} \cup R_{B_2})$, כאשר tc מסמן סגור טרנזיטיבי. ברור אם כן שכל יחס (בפרט יחס שקילות) המוכל ב- R_{B_1} וגם ב- R_{B_2} מוכל ב- $R_{B_1\cup B_2}$, שהוא אם כן האינפימום ב- X של R_{B_1} ושל R_{B_2}; וכל יחס שקילות המכיל את R_{B_1} ואת R_{B_2} מכיל את $R_{B_1\cap B_2}$, שהוא אם כן הסופרימום ב-- X של R_{B_1} ושל R_{B_2}.

3. נגדיר את הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ על פי: $f(n) := \max\{m : 2^m \mid n\}$ (לדוגמה, $f(3)=0,\ f(6)=1$). ונגדיר את היחס $\preceq$ על $\mathbb{N}$ באופן הבא: $a \preceq b$ אמ"ם $f(a) \le f(b)$.

א. הוכיחו: $\preceq$ הוא קדם-סדר.

קדם סדר הוא יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

$\preceq$ רפלקסיבי כי $(\mathbb{N},\le)$ רפלקסיבי.

$\preceq$ טרנזיטיבי כי אם $a \preceq b$ וגם $b \preceq c$ אז אפשר לכתוב $a = 2^{k_1}\cdot m_1$, $b = 2^{k_2}\cdot m_2$, $c = 2^{k_3}\cdot m_3$ כאשר $m_i \ge 1$ אי-זוגיים ו- $0 \le k_1 \le k_2 \le k_3$ שלמים. לכן $f(a) = k_1 \le k_3 = f(c)$ ו- $a \preceq c$.

כעת נגדיר על $\mathbb{N}$ את יחס השקילות: $b \approx_{\preceq} a$ אמ"ם $a \preceq b$ וגם $b \preceq a$. בתרגול ראינו שהיחס $\tilde{\preceq}_{\approx_{\preceq}}$ המושרה על ידי $\preceq$ על מחלקות השקילות $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ הוא יחס סדר חלקי.

ב. הוכיחו כי $\tilde{\preceq}_{\approx_{\preceq}}$ הוא יחס סדר לינארי על $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$.

מכיוון ש- $(\mathbb{N}\cup\{0\},\leq)$ סדר לינארי כל שתי מחלקות ב- $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ ניתנות להשוואה.

ג. מצאו את הסופרימום והאינפימום (אם קיימים, אחרת ציינו שלא) של תת הקבוצות הבאות של $\mathbb{N}/\approx_{\preceq}$ עם יחס הסדר $\tilde{\preceq}_{\approx_{\preceq}}$:

1) $\left\{[a]_{\approx_{\preceq}} : f(a) \text{ is prime}\right\}$.

האינפימום: $\left[2^2\right]_{\approx_{\preceq}}$

אין בקבוצה סופרימום, כי כידוע יש אינסוף מספרים ראשוניים.

2) $\left\{[a]_{\approx_{\preceq}} : f(a)<10\right\}$.

האינפימום: $\left[2^0\right]_{\approx_{\preceq}}$

הסופרימום: $\left[2^9\right]_{\approx_{\preceq}}$

4. ציינו והוכיחו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם חח"ע ו/או על:

א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\},\ f(n)=|n|$.

על אבל אינה חח"ע.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3$.

חח"ע ועל.

ג. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x$.

חח"ע ואינה על.

5. תהיינה A,B,C,D קבוצות ו- $f:A\to B,\ g:B\to C,\ h:C\to D$ פונקציות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $h\circ g\circ f$ הפיכה, אז g חח"ע או g על.

הפרכה (נסו דוגמאות סופיות).

ב. אם $h\circ g\circ f$ חח"ע ו- $h\circ g$ חח"ע, אז $g\circ f$ חח"ע.

הוכחה. שימו לב ש- $h\circ(g\circ f)=h\circ g\circ f$ גורר מיידית ש- $g\circ f$ חח"ע.

ג. אם $h\circ g\circ f$ על ו- $h\circ g$ על, אז $g\circ f$ על.

הפרכה (נסו דוגמאות סופיות).

ד. אם $h\circ g\circ f$ על ו- $g\circ f$ על, אז $h\circ g$ על.

הוכחה. שימו לב ש- $(h\circ g)\circ f=h\circ g\circ f$ גורר מיידית ש- $h\circ g$ על.

ה. אם $g\circ f$ הפיכה ו- $h\circ g$ הפיכה, אז g הפיכה.

הוכחה. מכך ש- $g\circ f$ הפיכה נובע ש- g על מכך ש- $h\circ g$ הפיכה נובע ש- g חח"ע.

ו. אם $g\circ f$ הפיכה ו- $h\circ g$ הפיכה, אז $f\circ g\circ h$ הפיכה.

הוכחה. נשים לב שמהנתון g הפיכה, f חח"ע ו- h על.

$g\circ f$ הפיכה (לכן על), ו- g הפיכה (לכן חח"ע) לכן f על (ראה תרגיל זה בתרגול).

בדומה:

$h\circ g$ הפיכה (לכן חח"ע), ו- g הפיכה (לכן על) לכן h חח"ע (ראה תרגיל זה בתרגול).

לכן $h\circ g\circ f$ הפיכה כהרכבה של שלוש פונקציות הפיכות.

6. תהי $f:A\to B$ פונקציה.

א. הוכיחו: אם $C\subseteq A$ אזי $C\supseteq$ "f^{-1}"("f"$(C))$.

יהי $c\in C$. אזי $f(c)\in$ "f"(C) ולכן, $c\in$ "f^{-1}"("f"$(C))$ לפי ההגדרה של תמונה הפוכה.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f:A\to B$ ו- $C\subseteq A$ כך שההכלה בסעיף א' היא הכלה ממש.

למשל: $A,B=\mathbb{R}$. נבחר $f(x)=|x|$ ו- $C=\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$. מתקיים $C\subsetneq$ "f^{-1}"("f"$(C))=\mathbb{R}$.

ג. הוכיחו כי בסעיף א' מתקיים שוויון לכל $C\subseteq A$ אמ"מ f חח"ע.

$\Leftarrow$: נתון שלכל $C\subseteq A$ מתקיים "f^{-1}"("f"$(C))=C$ ובפרט לכל יחידון $\{x\}\subseteq A$ מתקיים "f^{-1}"("f"$(\{x\}))=\{x\}$. לכן אם נניח בשלילה שקיימים $x\neq y$ כך ש- $f(x)=f(y)$ אז "f^{-1}"("f"$(\{x\}))\supseteq\{x,y\}$ בסתירה להנחה.

$\Rightarrow$: אם f חח"ע, מספיק להוכיח שלכל $C\subseteq A$ מתקיים "f^{-1}"("f"$(C))\subseteq C$.

נניח בשלילה שאין הכלה, כלומר, קיים x כך ש:

$$x\notin C\wedge x\in \text{"}f^{-1}\text{"}(\text{"}f\text{"}(C))\Leftrightarrow$$
$$x\notin C\wedge f(x)\in \text{"}f\text{"}(C)\Leftrightarrow$$
$$x\notin C\wedge \exists y\in C\left(f(x)=f(y)\right)$$

בסתירה לחד-חד-ערכיות f.

ד. הוכיחו: אם $D\subseteq B$, אזי "f^{-1}"("f"("f^{-1}"$(D)))=$ "f^{-1}"(D).

על פי סעיף א' מספיק להוכיח ש- "f^{-1}"("f"("f^{-1}"$(D)))\subseteq$ "f^{-1}"(D),

אבל אם $x\in$ "f^{-1}"("f"("f^{-1}"$(D)))$ אז $f(x)\in$ "f"("f^{-1}"$(D))$. קל לראות שתמיד "f"("f^{-1}"$(D))\subseteq D$; לכן $f(x)\in D$ וקיבלנו כדרוש ש- $x\in$ "f^{-1}"(D).

7. תהי $f:A\to B$. נגדיר $g:P(B)\to P(A)$ לפי: $g(X)=$ "f^{-1}"(X). הוכיחו: f חח"ע אמ"מ g על.

אם f חח"ע אז לכל $X\in P(A)$, "f"$(X)\in P(B)$ וגם $X=$ "f^{-1}"("f"$(X))=g($"f"$(X))$ על פי סעיף ג' של שאלה 6, כלומר, g על.

אם g על, נניח בשלילה ש- f אינה חח"ע, לכן קיימים $x_1\neq x_2$ ב- A כך ש- $f(x_1)=f(x_2)=y'$.

כעת, g על, לכן לכל $X\in P(A)$ קיים מקור $Y\in P(B)$ כך ש- $g(Y)=X$.

עבור $X=\{x_1\}$ בהכרח $y'\in Y$ ולכן גם $x_2\in g(Y)=X$ וסתירה.