

לינארית להנדסה- תרגיל 10

תרגיל 1.

1. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה בת-ו"ל $\{B\}$ הוכיחו ש- $v_{n+1} \notin \text{Span}\{B\}$ הוכיחו ש- $B' = B \cup \{v_{n+1}\}$ בת-ל

2. יהי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ קבוצה בת-ל השלימו את B לבסיס ל- \mathbb{R}^4

תרגיל 2. הוכחה הפרך: יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אז

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

תרגיל 3. תהי מטריצה $A \in M_{4 \times 8}(\mathbb{R})$ כך ש- $\text{Rank}(A) = 4$

1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

3. למה שווה $\dim(N(A))$?

תרגיל 4. הפוך את הקבוצה $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לקבוצה אורתונורמלית.

תרגיל 5. הוכיחו ש- $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ היא מכפלה פנימית מעל $V = \mathbb{R}^{n \times n}$

תרגיל 6. הוכיחו שמתקיים $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. שוויון זה נקרא כלל המקבילית כי מבחינה גאומטרית הוא הקובע שבמקבילית סכום ריבועי ארבע צלעות שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

תרגיל 7. יהא V מעל \mathbb{F} ממ"פ עם מ"פ $\langle v, u \rangle$.

1. הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלומר הוכיחו כי $\langle v, \alpha u + w \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$ (לכל $v, u, w \in V$ ולכל α סקלאר)

2. יהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס. יהא $v \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v \rangle = 0$. הוכח כי $v = 0$

3. יהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס. יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v \rangle = \langle v_i, u \rangle$. הוכח כי $v = u$

4. לכל $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ נגדיר פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ ע"י $\langle v, v' \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v' \rangle$. הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ גם כן מ"פ על V .

תרגיל 8. נגדיר $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z$$

ונגדיר קבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v \in S} f(v)$$

כלומר את הערך המקסי' ש f מקבלת עבור קלטים מ S . [רמז: אי שיוויון קושי שורץ, שימו לב כי $f(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

תרגיל 9. תהי $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב- V הוכח שלכל $v \in V$ מתקיים $v - \sum_{i=1}^k \langle v, v_i \rangle v_i \in S^\perp$

בהצלחה!!