תרגיל 8

14 ביוני 2017

1. נתבונן בשלושת המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2=1\right\} \\ Y &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, (x-2)^2+y^2=1\right\} \\ Z &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\} \end{aligned}$$

ראיתם בתירגול כי Z אינו הומואומרפי ל X. האם Yהומואומורפי ל X או ל Z?
הוכיחו תשובתכם.

פתרון :

המרחב Y אינו הומואומרפי ל X וגם לא ל Z כי ב Yאם נוציא את הנקודה $(1,0)\in Y$ [נקודת ההשקה בין שני המעגלים] נקבל מרחב לא קשיר ואילו ב X וגם ב Z כל נקודה שלא נוציא לא תפגע בקשירות שלהם.

2. תהא $X\neq\emptyset$ עם הטופולוגיה הקו־סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? [רמז: תלוי בעוצמה של X]

פתרון :

אם X סופית אזי הטופולוגיה הקו־סופית היא שווה לטופולוגיה הדיסקרטית ולכן כל תת קבוצה היא סופית ולכן סגורה וגם פתוחה. במקרה זה המרחב יהיה קשיר רק אם יש בו נקודה אחת כי אחרת אם יש בו יותר מנקודה אחת נוכל לרשום $X=\{x\}\cup(X\backslash\{x\})$ עבור $x\in X$ וזהו איחוד של קבוצות פתוחות זרות שאיחודן שווה כל המרחב.

במקרה של Xאין סופית נקבל כי X קשיר. למה? נניח בשלילה כי X אינו קשיר שזה גורר שקיימת $A\neq\emptyset,X$ המקיימת $X=A\cup A^c$ ובנוסף A,A^c פתוחות. זה אומר ש A,A^c סגוחה ובפרט סגורות ובפרט סופיות. אבל איחוד של קבוצות סופיות לא יכול להיות שווה X שזוהי קבוצה אין סופית. סתירה.

לסיכום X קשיר אמ"מ X קבוצה אין סופית או בעלת איבר בודד.

3. תזכורת: הישר של של סורגנפריי־ נסמן ב־ $\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטפולוגיה T המוגדרת כך: $O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

(א) הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים. כלומר הראו שאם A תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת אזי A אינו קשיר.

פתרון :

יהא A תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת ונוכיח שהוא אינו קשיר. קיימת ב A לפחות שתי נקודות $x \neq y \in A$. בה"כ $x < y$. נגדיר $V = [y,\infty) \cap A, U = (-\infty, y) \cap A$. ברור ש U, V זרות, לא ריקות (כי $y \in V, x \in U$) שאיחודם A. נותר להוכיח כי הם קבוצות פתוחות ב A. מספיק להראות כי $[y,\infty), (-\infty, y)$ פתוחות ב $\mathbb{R}_\ell$: כיוון ש T מכילה את הטופולוגיה הרגילה של $\mathbb{R}$ אזי $(-\infty, y) \in T$ ו $[y,\infty) = \bigcup_{y<n\in\mathbb{N}} [y,n)$ איחוד של קבוצות פתוחות ולכן גם פתוחה. ומכאן ש A אינו קשיר.

(ב) מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם אינן רציפות.
פתרון :

ראשית, הוכחתם טענה כללית לפיה פונקציה קבועה בין מרחבים טופלוגיים היא רציפה נוכיח כי אלו כל הפונקציות הרציפות. אכן, תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$ רציפה ונניח בשלילה כי f אינה קבועה. כיוון ש $\mathbb{R}$ קשיר נקבל כי $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_\ell$ תת מרחב קשיר. הפונקציה אינה קבועה ולכן $1 < |f(\mathbb{R})|$ ולכן אינו קשיר לפי סעיף הקודם. סתירה.

4. הוכיחו כי $\mathbb{R}$ אינו הומואומורפי ל $\mathbb{R}^n$ לכל $1 < n$.
פתרון :

יהא $1 < n$. אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}$ נקבל מרחב שאינו קשיר. למשל אם נזרוק את $b \in \mathbb{R}$ נקבל $\mathbb{R}\setminus\{b\} = (-\infty, b) \cup (b, \infty)$. לעומת זאת, אם נזרוק נקודה מ $\mathbb{R}^n$ נקבל מרחב קשיר מסילתית ולכן קשיר. נוכיח זאת: יהא a נקודכה אזי $\mathbb{R}^n\setminus\{a\}$ קשיר מסילתית. הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n\setminus\{a\}$. אם הקו בינהם $a \notin L_{x,y} = \{yt + (1-t)x : t \in [0,1]\}$ לא עובר ב a אזי הוא המסילה המחברת בינהם. אחרת, אם $a \in L_{x,y}$ אזי נבחר $z \neq x, y$ שנמצאת מחוץ לישר $L_{x,y}$ ואזי הישר $L_{x,z}$ בין xל z אינו מכיל את a וכמו כן גם הישר $L_{z,y}$ אינו מכיל את a ולכן השרשור בין $L_{x,z}$ ו $L_{z,y}$ הוא מסילה בין x לy שאינו מכיל את a.

כעת, אם היה הומיאומורפיזם $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אזי גם הפונקציה המצומצמת : $f_{|\mathbb{R}\setminus\{a\}}$ $\mathbb{R}^n\setminus\{a\} \to \mathbb{R}\setminus\{f(a)\}$ הייתה המיאומורפיזם בסתירה לאבחנות לעיל.

5. יהא $A \subseteq \mathbb{R}$. הוכיחו כי אם A צפוף ב $\mathbb{R}$ וגם $A \neq \mathbb{R}$ אז A אינו קשיר.
פתרון :

יהא $z \in \mathbb{R}\setminus A$ נקודה במשלים. נסמן $A_1 = (-\infty, z) \cap A,\ \ A_2 = (z, \infty) \cap A$ אזי A_1, A_2 פתוחות ב A, זרות שאיחודם A (כי $z \notin A$) ולא ריקות (כי A צפוף ב $\mathbb{R}$) ולכן A אינו קשיר.

6. יהא (X, τ)מרחב טופולוגי ויהי $A \subseteq X$ תת מרחב קשיר. הוכיחו שלכל תת מרחב $B \subseteq X$ המקיים $A \subseteq B \subseteq cl(A)$ אז B קשיר.
פתרון :

נשתמש במשפט לפיו אם $A \subseteq B$ שני תתי מרחבים כך ש A צפוף ב B וגם A קשיר אז B קשיר. נרצה להוכיח כי $cl_B(A) = B$: מתקיים כי $cl_B(A) = cl(A) \cap B = B$ לפי הנתון. לכן A צפוץ ב B וקשיר ולכן לפי המשפט B קשיר.

7. יהא (X, τ)מרחב טופולוגי ויהי $A.B \subseteq X$ כך ש A קשיר ו B סגוחה המקיימים $A \cap B \neq \emptyset$. הוכיחו כי $A \subseteq B$.
פתרון :

לפי הנתונים $A\cap B$ סגוחה בתת מרחב A ומכיוון ש $A\cap B\neq\emptyset$ ו A קשיר נקבל כי $A\cap B=A$ ולכן $A\subseteq B$.

8. יהא (X,τ)מרחב טופולוגי ויהי $A.B\subseteq X$ סגורות. נניח כי $A\cup B, A\cap B$ קשירים. הוכיחו כי A,B קשירים. הדרכה: מ"ל A קשיר שכן ההוכחה ש B קשיר סימטרית. הניחו בשלילה כי $A=U\cup V$ כאשר U,V סגורות...

פתרון :

נניח בשלילה A אינו קשיר אזי קיימות U,V זרות, לא ריקות וסגורות ב A כך ש $A=V\cup U$. מתקיים $A\cap B=(U\cap B)\cup(V\cap B)$ ומכיוון ש $A\cap B$ קשיר ו $U\cap B, V\cap B$ סגורות ב $A\cap B$ וזרות נקבל, בה"כ כי $V\cap B=A\cap B, U\cap B=\emptyset$. עוד מתקיים $A\cup B=U\cup UV\cup B$ כאשר U זר ל $V\cup B$ [כי U זר גם ל Vוגם לB] וגם $U,V\cup B$ לא ריקות וגם סגורות ב $A\cup B$] כי U,V סגורות ב A ו A,B סגורות ב X] ולכן זה סתירה לכך ש $A\cup B$ קשיר. מש"ל.