# מבחן מועד א' באלגברה לינארית 83-110-06

מרצה: דר' שפרה רייף
מתרגל: תומר ירון
משך המבחן: שלוש שעות
לפניך 5 שאלות. תשובה נכונה מקנה את מספר הנקודות הרשום לידה. ניתן להשתמש במחשבון.

***שאלה 1.*** *יהי $V$ מרחב מכפלה פנימית ממימד 3. יהיו $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\},\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ תתי-קבוצות של $V$ שמקיימות*

$$\langle \vec{v}_i,\vec{w}_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

עבור $i,j=1,2,3$.

(1) ***(9 נקודות)*** *הוכח/י ש$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ בסיס ל$V$.*

(2) ***(9 נקודות)*** *תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית שמקיימת $T(\vec{v}_i)=w_i$ עבור $i=1,2,3$. הוכח/י ש$T$ חד-חד-ערכית.*

**פתרון:**

(1) תחילה נראה ש$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ בלתי תלויה לינארית. ניקח צירוף לניארי שמתאפס ונראה שהוא חייב להיות טריויאלי:

$$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3=\vec{0}$$

מכאן ש

$$\langle a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3,\vec{w}_1\rangle=\left\langle\vec{0},\vec{w}_1\right\rangle$$

לפי לינאריות של מכפלה פנימית

$$a_1\langle\vec{v}_1,\vec{w}_1\rangle+a_2\langle\vec{v}_2,\vec{w}_1\rangle+a_3\langle\vec{v}_3,\vec{w}_1\rangle=0.$$

לפי נתון מקבלים ש$a_1=0$. באופן דומה ניתן לכפול עם $w_2$ ו$w_3$ ולקבל ש$a_2=a_3=0$. לכן $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ בלתי תלויה לינארית וכיוון שגדלה שווה למימד $V$ היא בסיס.

(2) נראה ש$\ker T=\{\vec{0}\}$ ונסיק ש$T$ חד-חד-ערכית. יהי $\vec{v}\in\ker T$. כיוון ש$\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ בסיס, קיימים $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{F}$ כך ש

$$\vec{v}=a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3.$$

לכן,

$$\begin{aligned}\vec{0}&=T(\vec{v})\\&=T\left(a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+a_3\vec{v}_3\right)\\&=a_1T(\vec{v}_1)+a_2T(\vec{v}_2)+a_3T(\vec{v}_3)\\&=a_1\vec{w}_1+a_2\vec{w}_2+a_3\vec{w}_3\end{aligned}$$

נשים לב שבאופן דומה לטיעון בסעיף הקודם, $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ גם בלתי תלויה לינארית. לכן $a_1=a_2=a_3=0$ ולכן $\vec{v}=\vec{0}$.

***שאלה 2.*** *יהי $\alpha\in\mathbb{R}$, ותהי*

$$A:=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

(1) ***(7 נקודות)*** *יהי $v \in \mathbb{R}^2$. חשב/י את הזווית בין $\vec{v}$ ל־$A\vec{v}$ (פרטו את החישוב).*

(2) ***(2 נקודות)*** *הראה/י ש־$A$ מטריצה אורתוגונלית.*

(3) ***(3 נקודות)*** *חשב/י את את $A^8$. הסבירו.*

(4) ***(6 נקודות)*** *הוכיח/י שאם $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אורתוגונלית אזי גם $B^{10}$ היא מטריצה אורתוגונלית.*

**פתרון:**

(1) נסמן ב־$\beta$ את הזווית בין $\vec{v}$ ל־$A\vec{v}$. נחשב

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\langle \vec{v}, A\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|\,\|A\vec{v}\|} \\
&\underset{\text{matrix orthogonal an is } A}{=} \frac{\langle \vec{v}, A\vec{v}\rangle}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{v}\|} \\
&\underset{\vec{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{=} \frac{\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\|^2} \\
&= \frac{\left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha v_1 - \sin\alpha v_2 \\ \sin\alpha v_1 + \cos\alpha v_2 \end{bmatrix}\right\rangle}{v_1^2+v_2^2} \\
&= \frac{\cos\alpha v_1^2 - \sin\alpha v_1 v_2 + \sin\alpha v_2 v_1 + \cos\alpha v_2^2}{v_1^2+v_2^2} \\
&= \cos\alpha
\end{aligned}$$

לכן $\alpha=\beta$ או $\alpha = \frac{\pi}{2}-\beta$.

(2) מטריצה $A$ היא אורתוגונלית אם $AA^T = A^TA = I$. מספיק לבדוק ש $AA^T = I$.

$$\begin{aligned}
AA^T &= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} \\
&= I
\end{aligned}$$

(3) כיוון שהמטריצה $A$ אורתוגונלית, היא שומרת על אורכי וקטורים. כיוון שהזווית בין $\vec{v}$ ל־$A\vec{v}$ היא תמיד $\alpha$, ההעתקה $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ מסובבת כל וקטור $\vec{v}$ בזווית $\alpha$. לכן ההעתקה $S(\vec{v}) = A^8\vec{v}$ מסובבת כל וקטור $\vec{v}$ בזווית $8\alpha$ ולכן

$$A^8 := \begin{bmatrix} \cos 8\alpha & -\sin 8\alpha \\ \sin 8\alpha & \cos 8\alpha \end{bmatrix}$$

(4) נשתמש במשפט שמטריצה היא אורתוגונלית אם ורק אם היא שומרת על אורך של וקטורים.

$$\left\|B^{10}\vec{v}\right\| = \left\|B\left(B^9\vec{v}\right)\right\| = \left\|B^9\vec{v}\right\| = \ldots = \|B\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \,.$$

***שאלה 3.*** *יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצות דומות, ותהי $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה כך ש־$AP = PB$.*

(1) ***(6 נקודות)*** *הוכח/י של$A$ ול$B$ יש אותו פולינום אופייני.*

(2) ***(6 נקודות)*** *הוכח/י שאם $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של $B$ אז $P\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של $A$.*

(3) ***(6 נקודות)*** *הוכיח/י שאם $B$ לכסינה אז $A$ לכסינה.*

**פתרון:**

(1)

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\
&= \det\left(PBP^{-1}-\lambda PIP^{-1}\right) \\
&= \det\left(P(B-\lambda I)P^{-1}\right) \\
&= \det P \det(B-\lambda I) \det\left(P^{-1}\right) \\
&= \det P \det(B-\lambda I) (\det P)^{-1} \\
&= \det(B-\lambda I) = p_B(\lambda)
\end{aligned}
$$

(2) יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של $B$, כלומר $B\vec{v}=\lambda\vec{v}$ עבור $\lambda\in\mathbb{F}$, ו$\vec{v}\neq\vec{0}$. כעת,

$A(P\vec{v})=AP\vec{v}=PB\vec{v}=P\lambda\vec{v}=\lambda(P\vec{v})$.

כיוון ש $P$ הפיכה, $P\vec{v}\neq 0$ ולכן $P\vec{v}$ וקטור עצמי של $A$.

(3) נניח ש $B$ לכסינה ותהי $S$ המטריצה המלכסנת של $B$, כלומר $D=S^{-1}BS$ עבור איזשהי מטריצה אלכסונית $D$. נציב $B=P^{-1}AP$ ונקבל

$D=S^{-1}P^{-1}APS=(PS)^{-1}APS$.

כיוון ש$P,S$ הפיכות גם $PS$ הפיכה לכן $A$ לכסינה.

**שאלה 4.** תהי $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ויהי

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid XA = AX\}.$$

(1) **(7 נקודות)** הוכח/י ש $V$ תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(2) **(7 נקודות)** מצא/י בסיס ל$V$ ואת המימד של $V$.

(3) **(4 נקודות)** המטריצה $A$ שייכת ל$V$. מצא/י את הקואורדינטות של $A$ לפי הבסיס שמצאתם בסעיף הקודם.

**פתרון:**

(1) נשתמש בקריטריון במקוצר לתת-מרחב וקטורי.
מטריצת האפס $0_{2\times 2}$ שייכת ל$V$ כי

$$0_{2\times 2}A = A0_{2\times 2} = 0_{2\times 2}.$$

נניח ש $X_1, X_2 \in V$ אזי

$$(X_1 + X_2)A = X_1A + X_2A = AX_1 + AX_2 = A(X_1 + X_2)$$

לכן $X_1 + X_2 \in V$.
נניח ש $X_1 \in V$, $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי

$$(\alpha X_1)A = \alpha X_1 A = \alpha AX_1 = A(\alpha X_1)$$

לכן $\alpha X_1 \in V$.

(2) תחילה נאפיין את המרחב $V$. ניקח $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ אזי $X \in V$ אם ורק אם

$$\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

כלומר $a = d, b = c$. לכן

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} b & a \\ a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\}$$
$$= span\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

המטריצות $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ בלתי תלויות לינארית ולכן מהוות בסיס.

(3) כיוון ש

$$A = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

וקטור הקואורדינטות הוא $[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

**שאלה 5.** קבע/י אם המשפטים הבאים נכונים או לא נכונים. הוכיח/י את המשפטים הנכונים והפריך/י את המשפטים שאינם נכונים על ידי דוגמה נגדית.

(1) **(7 נקודות)** תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ותהי $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה אלמנטרית. אזי ל$A$ ול$EA$ יש את אותו מרחב שורות.

(2) *(**7 נקודות**) תהי* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *מטריצה מחלקת אפס. אז* $rank A = 0$.

(3) *(**7 נקודות**) תהי* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ו* $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. *נניח שלצורה מדורגת של* $A$ *יש שורת אפסים. אזי למערכת* $A\vec{x} = \vec{b}$ *יש אינסוף פתרונות.*

(4) *(**7 נקודות**) תהי* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *אזי* $\det(A + A^T) = \det A + detA^T$.

**פתרון:**

(1) נכון. הכפלה של מטריצה $A$ במטריצה אלמנטרית משמאל זה כמו להפעיל פעולת שורה על $A$ ופעולות שורה לא משנות את מרחב השורות.

(2) לא נכון. לדוגמה המטריצות $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ מחלקות אפס שכן $AB = 0_{2\times 2}$ אולם הדרגה שלהן היא 1.

(3) לא נכון. במערכת הבאה יש ל$A$ שורת אפסים אולם הפתרון הוא יחיד.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4) לא נכון. ניקח $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ אז

$$\det(A + A^T) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 8$$

אולם

$\det A + \det A^T = 1 + 1 = 2$.