

חשבון אינפי 2 למדמ"ח

תרגיל 1

בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא עד התרגול בשבוע המתחיל בתאריך ב' ניסן ה'תשע"ה, 22.3.2015.

1. הוכיחו: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

2. חשבו את האינטגרלים הבאים לפי הגדרה של אינטגרל מסוים:

א. $\int_1^3 (x^2 - x - 2) dx$

ב. $\int_0^4 \sqrt{x} dx$ (רמז: השתמשו בנקודות $k=0,1,\dots,n$ כנקודות החלוקה $\frac{4k^2}{n^2}$)

3. חשבו את האינטגרלים המסוימים הבאים ע"י שימוש בנוסחאות השטח המתאימות מהנדסת המישור:

א. $\int_{-1}^2 |2x-3| dx$

ב. $\int_0^{10} \sqrt{10x-x^2} dx$ (רמז: השלימו לריבוע)

4. הוכיחו: אם f אינטגרבילית ב- $[a,b]$ ו- $c \in \mathbb{R}$ קבוע, אז cf אינטגרבילית ב- $[a,b]$

ומתקיים: $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$.

5. הוכיחו: אם $f(x)$ רציפה ב- $[-a,a]$ ואי זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

6. שאלה ממבחן – תשע"ד
הוכיחו:

א. $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{2} \right) \leq \ln 2 \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{1.25} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.75} \right)$

ב. $\left(\frac{1}{1+0.25^2} + \frac{1}{1+0.5^2} + \frac{1}{1+0.75^2} + \frac{1}{2} \right) \leq \pi \leq \left(1 + \frac{1}{1+0.25^2} + \frac{1}{1+0.5^2} + \frac{1}{1+0.75^2} \right)$

7. השתמשו באינטגרלים מסוימים מתאימים על מנת לחשב את הגבולות הבאים :

א.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

ב.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}} \right)$$

8.

א. הוכיחו כי $0 < \int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt[3]{1+x^8}} < \frac{1}{8}$

ב. קבעו אם ערך האינטגרל $\int_{-2}^2 \frac{x^3 - 9}{|x| + 1} dx$ הוא חיובי או שלילי.

בהצלחה!!