הרצאה XXIV- אינפי 1

תרגיל: אי שיוויון של $Hölder$.

יהי $x \in \mathbb{R}^n$. ונגדיר $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ וגם $||x||_p = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{p}}$ $(p > 1)$. גם הגדרנו בליניארית שמכפלה סקלרית היא $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. וידוע שמתקיים $|(x,y)| \le ||x||_2 ||y||_2$.

נניח שקיימים $p,q \ge 1$ כך ש $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $|x,y| \le ||x||_p ||y||_p$.

הוכחה: מתקיים $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{p}} (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y)^{\frac{1}{q}}$. ונגדיר $f(t) = t^p$. וידוע שמתקיים כי $f(x) - f(y) \le C(x-y)^2$ ולכן f קבועה. כמו כן מתקיים $|f(x) - f(y)| \le C(x-y)^2$ ולכן $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le C|x-y|$. מכאן שקיים גבול לאגף השמאלי והוא שווה ל0. ז"א שקיימת גם נגזרת (ע"פ הגדרתה) ששווה ל0. מכאן שf קבועה.

משפט נחמד: $f \in C^\infty(R)$ אזי:

1. $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}\ \exists \mathrm{n_x} \in N : f^{(n_x)}(x) = 0 \Rightarrow f$ פולינום
2. $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}\ \exists \mathrm{n_x} \forall n \ge n_x :\ f^{(n)}(x) = 0 \Rightarrow f$ פולינום. את ההוכחות לא נוכל ללמוד, הן מבוססות על משפט בייר (Bair)

דוגמא: $x_0 = a\ , x_1 = b$. ונגדיר סדרה $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ מה הגבול של הסדרה?

פתרון: $x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n - x_{n-1}}{2}$ ונגדיר a_n על מנת לקבל סדרה הנדסית $a_n = -\frac{1}{2} a_{n-1}$, וניתן לחשב מיידית.

דוגמא: כתרגיל בית, מצא את גבול הסדרה מוגדרת ע"י $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$ וכמובן כאשר a,b חיוביים.

תרגיל אחרון: $f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$. כאשר $0 < \theta < 1$ וגם $\theta = \theta(\mathrm{x_0}, h)$.

1. f=? כאשר $\theta = \theta(x_0)$
2. f=? כאשר $\theta = \theta(h)$
3. f=? כאשר $\theta = constant$

חולקה רשימת משפטים שיהיו במבחן. סוף הסמסטר (: