תרגיל 13

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי תמורות:

א. $\begin{matrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{matrix}$ מעל $\mathbb{R}$ ב. $\begin{matrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{matrix}$ מעל $\mathbb{Z}_7$

2. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות .

א. $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} 11 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 9 \\ -2 & 4 & 1 \end{matrix}$

3. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי מינורים (פיתוח לפי שורה או עמודה)

א. $\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} 2 & 0 & 12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & 8 & 6 \end{matrix}$

4. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות לפי דירוג:

א. $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 33 \end{matrix}$ ב. $\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 7 \\ 5 & 6 & 0 \end{matrix}$

5. א. חשב את הדטרמיננטה של: $\begin{matrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{matrix}$. במילים: $A \in M_n(\mathbb{R})$ (מטריצה בגודל $n \times n$) כך ש: $A_{i,n+1-i} = 1$ וכל שאר הרכיבים הם 0.

ב. חשבו את הדטרמיננטה של: $\begin{vmatrix} 11 & 27 & 39 & 5 & 61 \\ 21 & 14 & 87 & 3 & 1 \\ 90 & 123 & 456 & -17 & -4 \\ 11 & 27 & 39 & 5 & 61 \\ -2 & 8 & 6 & -5 & 334 \end{vmatrix}$. (רמז: אם החישוב לוקח לכם יותר מדי זמן, כנראה שיש דרך פשוטה יותר)

6. תהי $A \in F^{n\times n}$ עבור n אי זוגי. בנוסף, A אנטי סימטרית. (כלומר, $A = -A^t$)

א. הוכיחו: אם $charF \neq 2$ אז $|A| = 0$.

ב. האם הטענה נכונה גם במאפיין 2?

7. תהי $A \in R^{n\times n}$ עבור $n \geq 2$, כך שלכל i, j $A_{i,j} \in \{1, -1\}$ (כלומר, כל האיברים במטריצה הם 1 או 1־).

הוכיחו ש$det(A)$ זוגית.

(רמז: ניתן להשתמש באינדוקציה)

8.א. הוכיחו שלא קיימת מטריצה $A \in M_2(\mathbb{R})$ (כלומר מטריצה מגודל 2 על 2 שכל רכיביה מ$\mathbb{R}$) כך ש: $A^2 = \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

(רמז: השתמשו בדטרמיננטות)

ב. האם הטענה נכונה גם מעל $\mathbb{C}$?