תרגיל 8

1. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

פתרון : לא! למשל

$$\left\langle 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 1^2 = 25$$

אבל

$$3\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot \left(2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1^2\right) = 3 \cdot 9 = 27$$

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

פתרון : כן! נבדוק את הקריטריונים

i.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 2(x_1 + x_2)x_3 + 7(y_1 + y_2)y_3 \\
= \; & 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 7y_1y_3 + 7y_2y_3 = (2x_1x_3 + 7y_1y_3) + (2x_2x_3 + 7y_2y_3) \\
= \; & \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2\alpha x_1x_2 + 7\alpha y_1y_2 \\
= \; & \alpha 2x_1x_2 + \alpha 7y_1 = \alpha\left(2x_1x_2 + 7y_1\right) = \alpha\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

ii.

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + 7y_1y_2 = 2x_2x_1 + 7y_2y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

.iii

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1^2 + 7y_1^2 \geq 0$$

וקיים שיוויון לאפס אמ"מ $x_1 = y_1 = 0$ אמ"מ זהו וקטור האפס

2. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$ עם מ"פ $\langle v, u \rangle$.

(א) הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכיחו כי $\langle v, \alpha u + w \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$ (לכל $v, u, w \in V$ ולכל α סקלאר)
פתרון : לפי הגדרת מכפלה פנימית ותכונות הצמוד המרוכב נקבל כי

$$\langle v, \alpha u + w \rangle = \overline{\langle \alpha u + w, v \rangle} = \overline{\langle \alpha u, v \rangle + \langle w, v \rangle} = \overline{\alpha \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle} = \overline{\alpha} \overline{\langle u, v \rangle} + \overline{\langle w, v \rangle} = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$$

(ב) יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס. יהא $v \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v \rangle = 0$. הוכח כי $v = 0$
פתרון : כיוון ש B בסיס, קיים צירוף לינארי

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ולכן

$$\langle v, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0 = 0$$

ולכן מתכונת מכפלה פנימית $v = 0$ כנדרש.

(ג) יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס. יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v \rangle = \langle v_i, u \rangle$. הוכח כי $v = u$
פתרון : מהנתון נקבל כי $\langle v_i, v - u \rangle = \langle v_i, v \rangle - \langle v_i, u \rangle = 0$ לכל i . מסעיף קודם נקבל כי $v - u = 0$ ולכן $v = u$.

(ד) לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : V \times V \to \mathbb{F}$ ע"י $\langle v, v' \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v' \rangle$. הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ מ"פ על V אמ"מ $0 < \alpha$.
פתרון : נניח כי $0 < \alpha$ ונבדוק את אקסיומות מ"פ בהסתמך שהאקסיומות מתקיימות עבור $\langle v, v' \rangle$

i. לינאריות ברכיב הראשון:

$$\langle v + \beta u, w \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v + \beta u, w \rangle = \alpha \cdot [\langle v, w \rangle + \beta \cdot \langle u, w \rangle] = \alpha \cdot \langle v, w \rangle + \beta \cdot \alpha \cdot \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle_\alpha + \beta \cdot \langle u, w \rangle_\alpha$$

ii. הרמטיות:

$$\langle v, v' \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v' \rangle = \alpha \cdot \overline{\langle v', v \rangle} = \overline{\alpha \cdot \langle v', v \rangle} = \overline{\langle v', v \rangle_\alpha}$$

כאשר השיוון השלישי נכון בגלל ש $\alpha \in \mathbb{R}$ ולכן $\bar{\alpha} = \alpha$

iii. אי שליליות

$$\langle v, v \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v \rangle \geq 0$$

ככפל של 2 מספרים ממשים אי שלילים. בנוסף $\langle v, v \rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v \rangle = 0$ אמ"מ $\langle v, v \rangle = 0$ (כי $\alpha \neq 0$) אמ"מ $v = 0$.

מצד שני אם $\alpha \le 0$ אזי לכל $v \neq 0$ יתקיים $\langle v,v\rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v,v\rangle \le 0$ ולכן זה לא מכפלה פנימית (זכרו שבמכפלה פנימית קיים שיוויון אמ"מ $v=0$).

(ה) יהא V ממ"פ. תהא $T:V\to V$ ה"ל. הפריכו את הטענה: אם לכל $v\in V$ מתקיים כי $\langle Tv,v\rangle = 0$ אזי $T=0$
פתרון : למשל $\mathbb{R}^2$עם המכפלה הסקלארית ו T המוגדרת להיות

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

אזי אכן מתקיים כי

$$\left\langle T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\rangle == yx - xy = 0$$

אבל $T\neq 0$

3. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ (עם מ"פ $\langle v,v'\rangle$) ויהא $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס המקיים

$$\langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

כלומר בסיס או"ג שמקיים בנוסף $\langle v_i,v_i\rangle = 1$ לכל i (לבסיס כזה קוראים בסיס אורתונורמאלי).
הוכיחו כי לכל $v\in V$ מתקיים כי

$$\langle v,v\rangle = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

($[v]_B$ זה וקטור הקורדינאטות של v ביחס ל B, $[v]_B^t$ זה השילוף שלו והכפל $[v]_B^t \cdot [v]_B$ הוא כפל וקטור $n\times 1$ בוקטור $1\times n$).

פתרון : נסמן $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B$ שזה שקול לכך ש $v=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ואז

$$\langle v,v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\alpha_j \langle v_i,v_j\rangle \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\alpha_i \langle v_i,v_i\rangle \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

כאשר מעברים (1) נובעים מתכונות הבסיס של השאלה. וסיימנו.

בהצלחה! ☺