

## תרגיל 3

להגשה עד 27.11.17

### שאלה 1

נגדיר  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  באופן הבא:

$$F(x) := \begin{cases} 21 & x \geq 4 \\ 2x + 5 & 0 \leq x < 4 \\ 3e^x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

נסמן ב  $\mu_F$  את מידת סטילטיס המוגדרת ביחס לפונקציה  $F$ .

1. חשבו את מידת סטילטיס ביחס ל  $F$  של הקבוצות הבאות:

(א)  $I_1 = (3, \infty)$

(ב)  $I_2 = (\frac{1}{4}, 2)$

(ג)  $I_3 = [-1, 0]$

(ד)  $I_4 = \{-2, 0, 4, 6\}$

2. נתבונן בתתי הקבוצות של  $(5, \infty)$ . מי מהן מדידה- $\mu_F$ ?

3. תהי  $A \subseteq (-\infty, 0)$ . הוכיחו כי  $A$  מדידה- $\mu_F$  אם ורק אם היא מדידה לבג.

### שאלה 2

יהי  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  מרחב מידה חיובית, ותהי  $Y$  קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה  $f: X \rightarrow Y$ .

1. נגדיר:  $\mathcal{B}_f := \{F \subseteq Y : f^{-1}[F] \in \mathcal{A}\}$ . הוכיחו כי  $(Y, \mathcal{B}_f)$  הינו מרחב מדיד.

2. לכל קבוצה  $E \subseteq Y$  ששייכת ל  $\mathcal{B}_f$ , נגדיר:  $\nu(E) := \mu(f^{-1}[E])$ . הוכיחו כי  $(Y, \mathcal{B}_f, \nu)$  הינו מרחב מידה חיובית.

הערה:  $(Y, \mathcal{B}_f, \nu)$  נקרא מרחב המידה המושרה מ  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  על ידי  $f$ .

### שאלה 3 - רציפות המידה.

יהי  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  מרחב מידה חיובית. ותהי  $(E_n)$  סדרת קבוצות ב  $\mathcal{A}$ .

נגדיר:  $\liminf E_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k$ ,

וכן:  $\limsup E_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$ .

הוכיחו כי:

1.  $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n)$ .

2. אם קיים  $n_0$  כך ש-  $\mu(\bigcup_{k \geq n_0} E_k) < \infty$ , אזי:  $\limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n)$ .

#### שאלה 4

יהי  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  מרחב מידה חיובית, ותהי  $S \in \mathcal{A}$ .  
לכל  $F \in \mathcal{A}$  נגדיר  $\nu(F) := \mu(F \cap S)$ . הוכיחו כי  $(X, \mathcal{A}, \nu)$  הינו מרחב מידה חיובית.

**בהנאה (:**