תורת הקבוצות

תרגול 1

יש ש"ב כל שבוע! להגשה! ב- math-wiki.com .

tamarnachshoni@gmail.com

תרגיל: סדר תמיד אנטי-סימטרי.

פיתרון: $(a<b) \wedge (b<a) \Rightarrow a<a$

בסתירה!

מ.ש.ל.

הגדרה: עבור A קס"ח נגדיר:

I. $a\in A$ ייקרא מינימאלי אם לא קיים $b\in A$ כך ש- $b<a$.

II. $a\in A$ ייקרא מקסימאלי אם לא קיים $b\in A$ כך ש- $a<b$.

III. $a\in A$ ייקרא מינימום (קטן ביותר) אם לכל $b\in A$ $a<b$

IV. $a\in A$ ייקרא מקסימום (גדול ביותר) אם לכל $b\in A$ $b<a$.

תרגיל: הוכיחו שבקבוצה סדורה קווית - איבר מינימאלי $\Longleftrightarrow$ מינימום.

פיתרון: $(\Leftarrow)$ תמיד.

$(\Rightarrow)$ יהיה $a\in A$ מינימאלי, ויהיה $b\neq a\in A$.

ומאחר $b\nless a$, אבל A קווית, לכן $a<b$.

תרגיל: הוכח/הפרך. סדר על קבוצה הוא מלא $\Longleftrightarrow$ כל מינימאלי הוא מינימום

וגם כל מקסימאלי הוא מקסימום.

פיתרון: $(\Rightarrow)$ תמיד.

$(\Leftarrow)$ לא נכון! לדוגמא

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & a & \\
b \arrow[ur] & & c \arrow[ul] \\
 & d \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

שאלה: האם המשלים של קבוצה סופית הוא קו-פינאלי.

פיתרון: באופן כללי לא. נבחר $\mathbb{N}\cup\{0\}$ כאשר 0 לא מתאים לאף אחד מהאחרים.

שאלה: ומה אם A סדורה קווית?

תשובה: עדיין לא. למשל נגדיר יחס שבו 0 גדול מכל האחרים.

אז למשל $\mathbb{N}$ אינה קופינאלית.

תרגיל: קבוצה A סדורה חלקית. $C=\{B\subseteq A\}$ קופינאליות.
הוכח: $a\in\bigcap C \iff a$ מקסימלי.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ תהיה B שלמה ב-A. קיים $b\in B$ כך ש- $a<b$ או $a=b$. אבל a מקסימלי לכן $a=b$.
$(\Rightarrow)$ נניח ש-a לא מקסימלי. נבדוק $A\setminus\{a\}$.
נראה שהיא שלמה.
יהיה $b\in A$. אם $b\neq a$ אז $b\in A\setminus\{a\}$,
ובפרט $b>a$ כי a לא מקסימלי.

מ.ש.ל!

טענה: אם A,B סדורים קווית
אז f איזו' סדר $\iff$ f משמרת סדר

הוכחה: $(\Leftarrow)$ ברור
$(\Rightarrow)$ ① נניח ש- f חח"ע.
יהיו $a\neq b$. בה"כ $a<b$ לכן $f(a)<f(b)$
משמר סדר לכן בפרט $f(a)\neq f(b)$ כנדרש.
② צ.ל $f(a)<f(b) \Rightarrow a<b$
שקול $a\nless b \Rightarrow f(a)\nless f(b)$
והטענה ברורה!

תרגיל: הוכח קיום איזו' סדר בין,
① $\mathbb{Z},\mathbb{N}$ ② $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$

פתרון: ① לא! ב-$\mathbb{N}$ יש איבר ראשון.
בשלילה נניח ש- f קיים.
בפרט יש $f(z)=1$, $z\in\mathbb{Z}$. אבל קיים $b<z\in\mathbb{Z}$
אבל $f(b)\nless f(z)$ תמיד!

(II) לא. ההסבר הוא ש- $\mathbb{Q}$ צפופה! ו- $\mathbb{Z}$ לא!

נניח בשלילה שיש איזו' סדר. לכן $f(a)=1$ $f(b)=2$

עבור $a,b\in\mathbb{Q}$ כך ש- $a<b$. אבל קיים $a<c<b$

אבל אין $1=f(a)<f(c)<f(b)=2$, בסתירה!

<u>הגדרה:</u> תהיה A סדורה <u>קווית</u>. נגיד ש- A <u>סדורה היטב</u> אם לכל $B\subseteq A$ יש מינימום ב- B.

<u>דוגמאות:</u> (I) $\mathbb{N}$. (II) קבוצה סופית.

(III) $\mathbb{N}\cup\{\omega\}$ כאשר ω גדול מכולם.

<u>דוגמאות:</u> (I) $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ קוויות אבל לא היטב.

(II) $\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ ~~[illegible]~~ $=[0,\infty)$ אבל לדוגמא בה $(0,1)$ אין איבר ראשון.

<u>תרגיל:</u> הוכח שצפופה $\Rightarrow$ לא סדורה היטב.

<u>פתרון:</u> נזכר שקבוצה A צפופה אם לכל $a,b\in A$ יש $c\in A$ ביניהם.

נמצא תת קבוצה בלי איבר ראשון.

יהיו $a,b\in A$ ~~[illegible]~~ עם ש- $a<b$.

נסתכל על $\{c / c>a\}$

ברור שהיא לא ריקה.

נניח בשלילה שיש איבר ראשון. נקרא לו $a<c$.

מהצפיפות $a<d<c$, c הראשון אבל $d<c$ בסתירה

וגם $a<d$.

<u>תרגיל:</u> הוכח שכל קבוצה סדורה היטב קווית.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה שהיא לא קווית, ויהיו a,b שאינם ניתנים להשוואה.

אז בקבוצה $\{a,b\}$ אין איבר ראשון, בסתירה.

תרגיל: הוכח A סדורה היטב ⟺ אין בה סדרה אינסופית יורדת.

פתרון: (⇐) נניח בשלילה שיש $\ldots a_3 < a_2 < a_1$

אז $\{a_n\}$ תת קבוצה של A בלי מינימום - סתירה!

(⇒) נניח בשלילה שאינה סדורה היטב.

אז יש $\phi \neq B \subseteq A$ כך שאין ל-B איבר ראשון.

קיים $b_1 \in B$, b_1 לא ראשון ולכן קיים $b_2 < b_1$.

b_2 לא ראשון לכן קיים $b_3 < b_2 < b_1$. נמשיך באינדוקציה

ונקבל סדרה אין סופית יורדת.

תרגיל: תהיה A סדורה היטב. הוכיחו שהאיזו' סדר היחיד

מ-A לעצמה הוא הזהות.

הוכחה: נשים לב שאם A לא סדורה היטב הטענה לא בהכרח נכונה.

למשל $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $f(a)=a-1$.

נניח בשלילה שיש $f:A\to A$ איזו' סדר שאינו הזהות.

כלומר קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)\neq a$.

כלומר קבוצת האיברים שבהם הפונק' אינה שולחת לעצמה אינה ריקה!

אז יש לה איבר ראשון. נבחר את a להיות הראשון כך ש- $f(a)\neq a$

טענה: $f(a) > a$

הוכחה: נניח בשלילה $f(a) \not> a$ ולכן $f(a) < a$

כי אינם שווים. נסמן $f(a)=b$. אבל

a הראשון! כך ש- $f(a)\neq a$ אבל $f(b)=b$

בסתירה למש"ע.

למעשה הוכחנו משהו יותר חזק - אם $f:A\to A$ איזו' סדר

אז $f(a)\geq a$. [כאשר A סדורה היטב].

נראה של-a אין מקור! נניח שקיים b כך ש- $f(b)=a$.

b קטן מ-a כי אז $f(b)=b$.

אם b גדול מ-a. אז $f(b)>f(a)>a$.

כלומר אין ל-a מקור. בסתירה לעל של f.

מ.ש.ל!

תרגיל: יהיו A,B סדורות היטב. נגדיר סדר על $A\times B$.

(בסדר המילוני) $(a_1,b_1)<(a_2,b_2) \iff b_1<b_2$ או $b_1=b_2 \wedge a_1<a_2$

תוכיחו שזה סדר טוב.

פתרון: תהא $\emptyset \neq C \subseteq A\times B$

נקח $\emptyset \neq D = \{b \mid \exists a\in A,\ (a,b)\in C\}$.

יש לה איבר ראשון ונקרא לו $\tilde{b}$.

נקח $E = \{a\in A \mid (a,\tilde{b})\in C\}$

$\emptyset \neq E \subseteq A$ ולכן יש לה איבר ראשון $\tilde{a}$.

נוכיח $(\tilde{a},\tilde{b})$ איבר ראשון ב-C.

נקח $(a_2,b_2)\in C$ ונבדוק שזה מתקיים.

מהבנייה של $\tilde{b}$ מתקיים $b_2 \geq \tilde{b}$

אם $\tilde{b}<b_2$ סיימנו.

אם $\tilde{b}=b_2$ אז $a_2\in E$ ולכן $\tilde{a}<a_2$ או $\tilde{a}=a_2$

סה"כ $(\tilde{a},\tilde{b})=(a_2,b_2)$ או $(\tilde{a},\tilde{b})<(a_2,b_2)$.