# פונקציה

**הגדרה:** פונקציה (העתקה) היא התאמה המשייכת לכל איבר בקבוצה אחת, איבר יחיד בקבוצה שניה.
במילים אחרות, היא מספקת תלות של משתנה אחד בשני.

סימון: $y=f(x)$

בדרך כלל נדבר על פונקציה במשתנה אחד $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

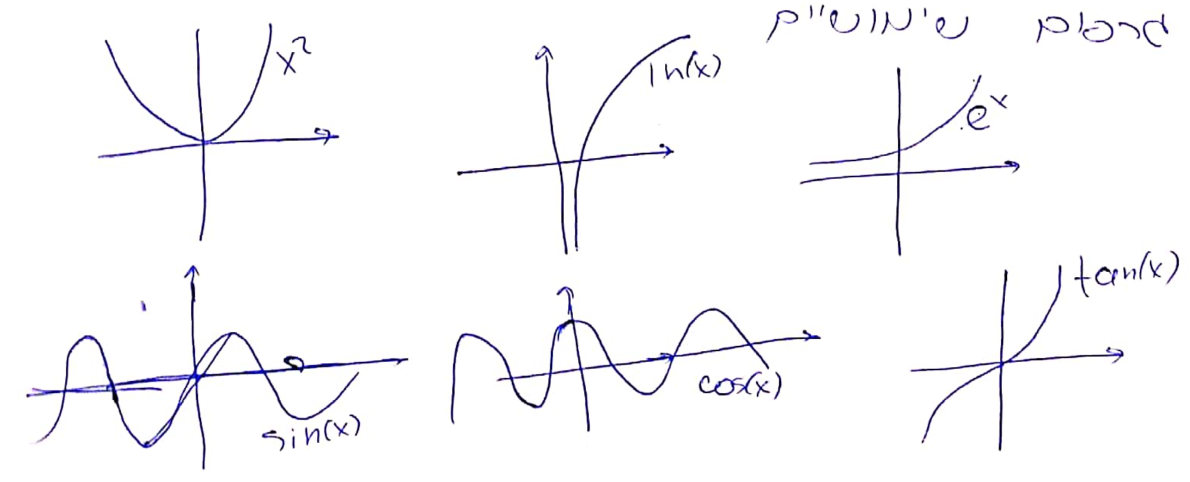
תחום ההגדרה של הפונקציה הוא אוסף של כל הערכים שעבורם $f$ מוגדרת.

**דוגמאות:**

1. פולינומים: $x, x^2+1, x^3+x+5, \ldots$
2. שורשים: $\sqrt{x}, \sqrt[5]{x^6}, \ldots$
3. פונקציה טריגונומטריות: $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$
4. פונקציה לוגריתמיות: $\ln, \log_{10}, \log_2, \ldots$
5. פונקציה אקספוננציאלית: $e^x, 2^x, 10^x, \ldots$

את הפונקציה ניתן לתאר במערכת צירים קרטזית ע"י גרף.

גרפים שימושיים



## הגדרה: (גבול לפי קושי) (2)

יהי $f$ פונק' המוגדרת בסביבה מנוקבת $A$ של $a$. ונגיד $L \in \mathbb{R}$ גבול של $f$ בנקודה $a$

אם $\forall \varepsilon>0 \, \exists \delta>0 : \forall x \in A \, (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$

סימון: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

תרגיל: הוכח לפי הגדרה

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+5} = 0$$

פתרון: צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ ק"מ $\delta>0$ כך ש $0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x^2+5}-0\right|<\varepsilon$

ושים לב שאם נבחר $\delta = 5\varepsilon$:

$$\left|\frac{x-1}{x^2+5}\right| = \frac{|x-1|}{|x^2+5|} \le \frac{|x-1|}{5} < \frac{5\varepsilon}{5} = \varepsilon$$

תרגיל: הגדרה במג"ד:

א. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

ב. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

ג. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

פתרון:

א. לכל $M \in \mathbb{R}$ יש $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<M$

ב. לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta \in \mathbb{R}$ כך ש: $x<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$

Scanned by CamScanner

③ ג. לכל $M\in\mathbb{R}$ יש $\delta\in\mathbb{R}$ כך ש

$$x<\delta \Rightarrow f(x)<M$$

תרגיל: הוכיחו לפי הגדרה

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{2}$$

~~פתרון: הוכיחו לפי הגדרה~~

$$\cancel{\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{2}}$$

~~פתר~~

פתרון: צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $M<0$ כך שלכל $x<M$ מתקיים $|f(x)-\frac{1}{2}|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{x+5}{2x+3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{7}{4x+6}\right|\overset{?}{<}\varepsilon \quad (1)$$

$$|4x+6|>\frac{7}{\varepsilon}$$

נניח $M<-\frac{6}{4}$ ולכן $|4x+6|=-4x-6$

ולכן נקבל

$$-4x-6>\frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow x<\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$$

כי מתקיים לכל $x<M$ כאשר $M<\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4}$

כלומר סה"כ.

יהי $\varepsilon>0$ ונבחר

$$M<\min\left\{\frac{-6-\frac{7}{\varepsilon}}{4},\ -\frac{6}{4}\right\}$$

ולכן לכל $x<M$ מתקיים

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

Scanned by CamScanner

(4) **תרגיל** הוכח לפי הגדרה שמתקיים

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$$

**פתרון** יש להראות שלכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך

כך ש $0<|x-1|<\delta \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>M$

מתקיים $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>\frac{x^2+1}{\delta^2}>\frac{1}{\delta^2}=M$

כלומר נוכל לבחור $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$

יהי $M>0$ ונבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ אז אם

$0<|x-1|<\delta$ אז

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>\frac{1}{\delta^2}(x^2+1)>\frac{1}{\delta^2}=M$$

**הגדרת הגבול לפי היינה**

גבול לפי היינה - $L\in\mathbb{R}$ יקרא גבול של הפונקציה $f$ בנקודה $a$ אם לכל סדרה $\{x_n\}$ המקיימת $x_n\to a$, $x_n\neq a$ מתקיים $f(x_n)\to L$ $\left(\lim_{x\to a}f(x)=L\right)$

**תרגיל** מצאו את הגבול של הפונקציה הבאה והוכיחו שהוא אכן הגבול.

**פתרון:** תהי $\{x_n\}$ סדרה כך ש $x_n\to 2$

נשתמש לפי אריתמטיקה של גבולות

ונקבל $f(x_n)=\frac{x_n+4}{x_n^2-6}\longrightarrow\frac{2+4}{4-6}=-3$

זה נכון לכל סדרה $\{x_n\}$ ולכן

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2-6}=-3$$

Scanned by CamScanner

__שלילת הגבול__

(אומר שלפי היינה: $f(x)$ אין גבול בנקודה $a$ ($a$ יחיד לבד)
אם קיימות שתי סדרות $a \ne x_n \to a$, $a \ne y_n \to a$

כך ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \ne \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

~~תרגיל: בכיוון של הגדרה:~~

__תרגיל:__

הוכיחו שהגבול $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

__פתרון:__

נבחר שתי סדרות המתכנסות לאפס:

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}$$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

מתקיים

$$f(x_n) = \cos(2\pi n) = 1 \to 1$$

$$f(y_n) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \to 0$$

לכן, לפי היינה, לפונקציה אין גבול בנקודה $x=0$.

__תרגיל:__ הוכיחו שהגבול

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

אינו קיים

__פתרון:__ נבחן שתי סדרות שמתכנסות לאפס:

$x_n = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ $y_n = \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$

Scanned by CamScanner

מאד"ם: $f(x_n)=\frac{1}{n^2}+n \to \infty$

ואילו $f(y_n)=\frac{1}{n^4}+(-1)^n\cdot n^2$ אין גבול

ולכן לפונקציה אין גבול בנקודה $x=0$.

תרגיל: דוגמה של פונקציה

$$f(x)=\sin(2\pi x)$$

דוגמה של פונקציה אין גבול כאשר $x\to\infty$.

פתרון: ניקח שתי סדרות:

$$x_n=n\to\infty$$

$$y_n=\frac{2n+1}{4}\to\infty$$

$$f(x_n)=\sin(2\pi n)=0,0,\dots\to 0$$

$$f(y_n)=\sin\left(2\pi\frac{2n+1}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2}\right)=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=\cancel{-1,1,-1,1\dots}$$

$\cancel{=(-1)^n \to}$ ~~אין גבול לפי ד"ם~~

$$=1,1,1,\dots\to 1$$

ולכן הגבול לא ד"ם.

תכונות לחישוב גבולות

תרגיל: ~~חשב את הגבולות~~

אריתמטיקה של גבולות

1. אם $\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=k$

אזי

א. $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f\pm\lim_{x\to a}g$

ב. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f\cdot\lim_{x\to a}g$

ג. אם $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

Scanned by CamScanner

אלה:

**הגדרה:** פונקציות אלמנטריות

הפונקציות הבאות:
פונקציות טריגונומטריות, פולינומים, פונקציות
לוגריתמיות, אקספוננציאליות ו~~להרכב~~
ומנות שלהם.
וכל הסכומים, מכפלות
אלמנטריות הן
אינטואיטיבית, פונקציות
פונקציות שאפשר לכתוב אותן
בתור נוסחה.

**לדוגמה:** $\sin(5x)$, $\log(\arctan(8x^2+1))$

$$\tan\left(e^{\sin(x^5)}\right)$$

כל אלה פונקציות אלמנטריות כי
הן הרכבות של פונקציות אלמנטריות.

**משפט:** אם $f(x)$ אלמנטרית שמוגדרת
בנקודה $x_0$ אז $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

כלומר, אם $x_0$ נמצא בתחום ההגדרה
של $f$ אז הגבול של $f$ ב-$x_0$
הוא הערך של $f$ ב-$x_0$ כלומר
נציב $x_0$ בפונקציה ונקבל את הגבול.

**לדוגמה:** $f(x)=x^2$ פונקציה אלמנטרית
~~ו~~ עם תחום הגדרה $\mathbb{R}$.

אז

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2=4$$

$f(x)=\ln(x)$ פונקציה אלמנטרית
המוגדרת בכל $x>0$. אז

$$\lim_{x\to 5}\ln(x)=\ln(5)$$

Scanned by CamScanner

**תרגיל:** חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}$

ב. $\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}$

ג. $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\tan(x)}\right)$

**פתרון:**

א.
$$\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{x-4}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}=$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{9-(5+x)}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to4}-\frac{\cancel{4-x}}{\cancel{(4-x)}(3+\sqrt{5+x})}=$$
$$=\lim_{x\to4}-\frac{1}{3+\sqrt{5+x}}=-\frac{1}{3+\sqrt{5+4}}=-\frac{1}{3+\sqrt{9}}=-\frac{1}{6}$$

$3+\sqrt{5+x}$ פונקצי' של מוכרים בכל תחום הגדרה $x\geq-5$ $4>-5$ ולכן בתחום הגדרה

ב. נזכיר:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(kx)}{kx}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{\sin(kx)}=1 \quad 0\neq k\in\mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(7x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin(7x)}{7x}}_{1}\cdot7x\cdot\underbrace{\frac{5x}{\sin(5x)}}_{1}\cdot\frac{1}{5x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{7\cancel{x}}{5\cancel{x}}=\lim_{x\to0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

Scanned by CamScanner

.(ג

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\tan(x)}\right)=\cancel{\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\tan(x)+\sin(x)}{\quad}\right.}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\sin(x)}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}=$$

$$=\cancel{\lim_{x\to\pi}}\ \lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos(x)}{\sin(\pi-x)}=\lim_{t\to 0}\frac{1+\cos(t+\pi)}{\sin(t)}=$$

$$t=x-\pi$$
$$t\to 0$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}\cdot\frac{1+\cos(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}\cdot\frac{1-\cos(t)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}\cdot\frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(t)}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=$$

$$=1\cdot 1\cdot 0=0$$

אחרת: מצאו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}\right)\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2+\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}+\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{x\left(\quad +\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}_{1}+\underbrace{\sqrt[3]{1+x}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt[3]{1-x}}_{1}+\underbrace{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2}_{1}\right)}=\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

Scanned by CamScanner