אינטגרלים משולשים

הגדרה: תהי G תיבה המוגדרת ע"י האי-שוויונות הבאים: $k \le z \le l$, $c \le y \le d$, $a \le x \le b$. אם $f(x,y,z)$ רציפה בכל G אז:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

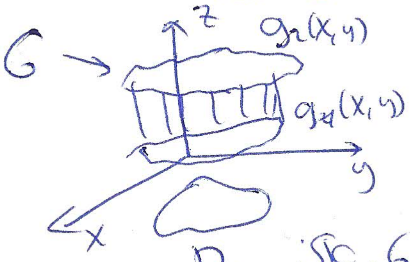
וניתן להחליף סדר האינטגרציה.

דוגמה: $G=[-1,2]\times[0,3]\times[0,2]$

$$\iiint_G 12xy^2z^3\,dV = \int_{-1}^{2}\int_0^3\int_0^2 12xy^2z^3\,dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\int_0^3 \left[3xy^2z^4\right]_0^2 dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\int_0^3 48xy^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left[16xy^3\right]_0^3 dx = \int_{-1}^{2} 432x\,dx = 216x^2\Big|_{-1}^{2} = 648$$

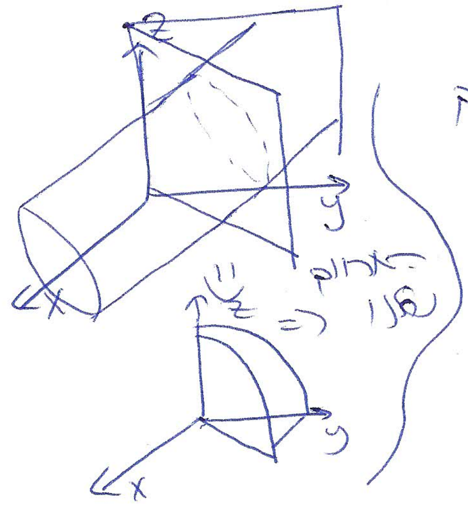
הגדרה: תהי R תחום סגור וחסום במישור xy ותהי $g_1(x,y)$, $g_2(x,y)$ שתי פונקציות רציפות המקיימות $g_1 \le g_2$ לכל (x,y) ב-R. לא אומר שבתחום R, המשטח $z=g_2(x,y)$ (נקרא) המשטח העליון, $z=g_1(x,y)$ (נקרא) המשטח התחתון. (נסמן ב-G את הגוף המורכב מכל הנקודות שנמצאות בין המשטח התחתון למשטח העליון, מעל לתחום R או מתחת. לתחום G כזה נקרא גוף פשוט. התחום R נקרא היטל של G על המישור xy.



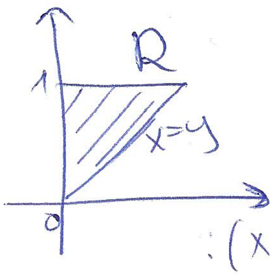
משפט: תהי G גוף פשוט שיש לו משטח עליון $z=g_2(x,y)$ ומשטח תחתון $z=g_1(x,y)$ ותהי R היטל של G על המישור xy. אם $f(x,y,z)$ רציפה ב-G, אז:

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R\left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

תרגיל: תהי G הגוף באוקטנט הראשון, שהוא חלק מהגליל $y^2+z^2\le 1$ החתוך ע"י מישורים $x=0$, $x=y$.
חשב את $\iiint_G z\,dV$



פתרון: רצוי מאוד לנסות לצייר את התחום לפני שניגשים לפתרון של התרגיל!
(נעשה דרך אינטגרציה לפי z בשביל לכן נמצא את גבולות האינטגרציה עבור z כלומר נמצא את ~~...~~ המשטח העליון והתחתון שחוסמים מלמעלה ומלמטה את התחום G:



2) מהציור ניתן לראות ש: $0\le z\le\sqrt{1-y^2}$.

נמצאנו היטל של G על המישור xy:

(~~היטל~~ זוהי שלאחר שעשינו אינטגרציה לפי z

המטרה הבאה לפי נעשה אינטגרציה — או x

כמשל (אפשר גם לעשות לפי y דווקא ולאחר מכן לפי x):

לפי הציור רואים ש R חסום ע"י שני עקומים ש-

פונק' של y: $0\le x\le y$, וכמו כן $0\le y\le 1$, ונחשב את האינטגרל:

$$\int_0^1\int_0^y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} z\,dz\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^y \frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}dx\,dy=\int_0^1\int_0^y\frac{1-y^2}{2}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y^2)\left(x\Big|_0^y\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^1(y-y^3)\,dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

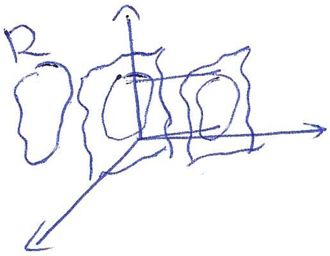
<u>שלבים בחישוב האינטגרל המשולש</u>

<u>שלב 1:</u> מצא משוואה $z=g_2(x,y)$ של המשטח העליון של G ומשוואה $z=g_1(x,y)$ של המשטח התחתון של G. הפונק' g_1 הוא הגבול התחתון של z ואילו g_2 הגבול העליון.

<u>שלב 2:</u> שרטט את היטל R של G על המישור xy לפי שרטוט זה, הצב את הגבולות האינטגרציה באינטגרל הכפול R

<u>הערה:</u> בתחומים מסויימים עדיף להתחיל את ~~ה~~חישוב האינטגרל באינטגרציה לפי x או לפי y ולא לפי z.

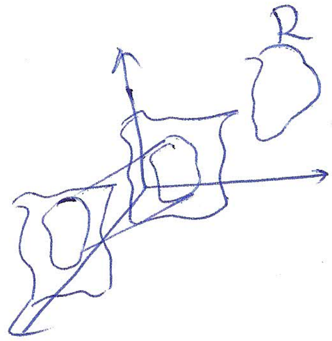
* אם יש לנו גוף המוגבל משמאל ע"י המשטח $y=g_1(x,z)$ ומימין ע"י המשטח $y=g_2(x,z)$ אז



$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right]dA$$

כאשר R הוא היטל של גוף G על מישור xy

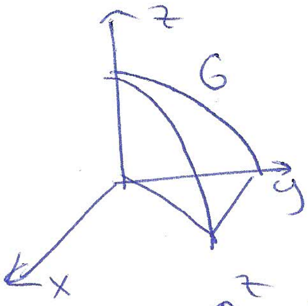
* באופן דומה אם גוף G מוגבל מאחור ע"י המשטח $x=g_1(y,z)$ ומלפנים ע"י המשטח $x=g_2(y,z)$ אז

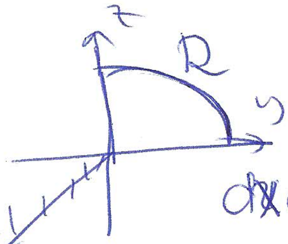


$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV=\iint_R\left[\int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right]dA$$

<u>דוגמא:</u> בדוגמה הזאת ונחשב $\iiint_G z\,dV$ אך הפעם נתחיל אינטגרציה לפי z:

(3) נציג את התחום שלנו כתחום שחסום
ע"י שני משטחים שהם פונק' של (y,z)
והיטל של התחום הזה על מישור
zy: התחום שלנו חסום ע"י שני מישורים
$x=y$ ו- $x=0$ $\Leftarrow$ $0\le x\le y$. והיטל
של הגוף על המישור zy הוא
רבע עיגול ברדיוס 1 ולכן אם
נסדר את סדר האינטגרציה כסדר הבא: $dxdzdy$





אז נציג את R כתחום שחסום ע"י שתי עקומות
שהן פונק' של y, ו-y הוא בין שני מספרים קבועים:
$0\le z\le\sqrt{1-y^2}$, $0\le y\le 1$:

$$\iiint_G z\,dxdzdy=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^y z\,dxdydz=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} zx\Big|_0^y dzdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} zy\,dzdy=\int_0^1 \frac{1}{2}z^2y\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}}dy=\int_0^1\frac{1}{2}(1-y^2)y\,dy=\frac{1}{8}$$

שינוי משתנים באינטגרל משולש

הגדרה: משוואות מהצורה $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$
מעבירות העתקה T ממרחב uvw למרחב xyz.

הגדרה: תהי T העתקה ממרחב uvw למרחב xyz המוגדרת
ע"י המשוואות: $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$
ונניח ש-3 הפונק' בעלות נגזרות חלקיות מסדר I אז
היעקוביאן של T מסומן ב J ומוגדר ע"י

$$J=J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

נוסחה להחלפת משתנים באינטגרלים משולשים

אם ההעתקה $x=x(u,v,w)$ $y=y(u,v,w)$ $z=z(u,v,w)$
מעתיקה את התחום S שבמרחב uvw על התחום R
שבמרחב xyz, ואם היעקוביאן $J=J(u,v,w)\neq 0$ אז:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV_{xyz}=\iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dV_{uvw}$$

מעבר לקואורדינטות גליליות

אינטגרל משולש בקואורדינטות דקרטיות שקשה לחשבו, ניתן לפעמים לחשבו ביתר קלות ע"י מעבר לקואורדינטות גליליות:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

כדי להעביר לאינטגרל משולש בקואורדינטות גליליות. את נוסחת ההצבה ניתן לרשום כך:

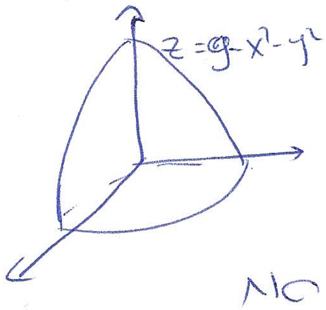
$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\text{תחום מתאים}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

כאשר $J = J(r,\theta,z) = r$ (יעקוביאן)

<u>תרגיל:</u> חשב באמצעות קואורדינטות גליליות את האינטגרל:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx$$

<u>פתרון:</u>



$$D = \{0 \le z \le 9-x^2-y^2\}$$

ההיטל של D על ציר xy הוא מעגל ברדיוס 3 ולכן

$$-\sqrt{9-x^2} \le y \le \sqrt{9-x^2}$$
$$-3 \le x \le 3$$

במילים אחרות לפי הגבולות התחום הוא התחום האינטגרציה G הוא היטלו R במישור xy לפי גבולות האינטגרציה לפי z — המעטפת העליון של G הוא הפרבולואיד הפוך $z = 9-x^2-y^2$ והמעטפת התחתון של מישור xy, כלומר $z=0$, ולכן האינטגרל בקואורדינטות גליליות הוא:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\,dz\,dy\,dx = \iiint_G x^2\,dV = \iint_R\left[\int_0^{9-r^2} r^2\cos^2\theta\,dz\right]dA =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2}(r^2\cos^2\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r^3\cos^2\theta\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 z r^3\cos^2\theta\Big|_0^{9-r^2} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3 (9r^3 - r^5)\cos^2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{9r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\cos^2\theta\right]_0^3 d\theta = \frac{243}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{243}{4}\pi$$

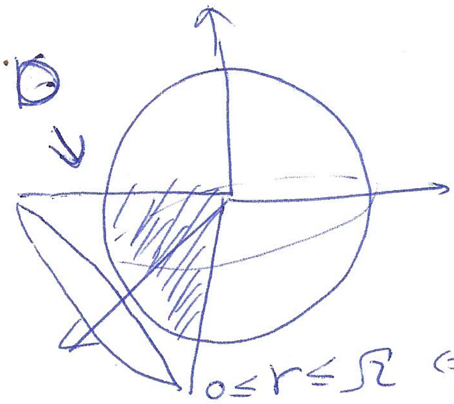
④ תרגול: חשבו את האינטגרל

$$\iiint_D (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$$

כאשר:

$$D=\{(x,y,z)\mid \sqrt{y^2+z^2}\le x\le\sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

פתרון: נשתמש בקואורדינטות גליליות:



$$x=x$$
$$y=r\cos\theta$$
$$z=r\sin\theta$$
$$\Downarrow$$
$$r\le x\le\sqrt{4-r^2}$$

לכן r עצמו צריך לקיים: $0\le r\le\sqrt{2} \Leftarrow r\le\sqrt{4-r^2}$

כי r אמור גם לקיים: $0\le\theta\le 2\pi$ ולכן:

$$\iiint_D=\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi}(x+r\cos\theta+r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dx\,dr=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}}(rx\theta+r\sin\theta-r\cos\theta)\Big|_0^{2\pi}dx\,dr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}}rx\,dx\,dr=\dots=2\pi$$

קואורדינטות כדוריות

$$x=r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z=r\cos\theta$$

כאשר: $(r,\theta,\varphi)\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

אם נרצה לעבור מקואורדינטות כדוריות בחזרה לקרטזיות
דרושים השינויים הבאים:

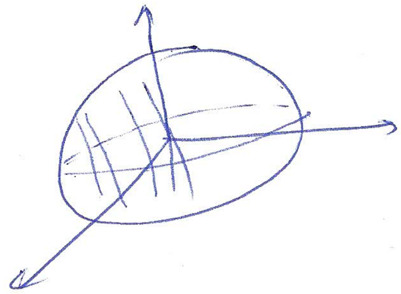
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\theta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

היעקוביאן: $J(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\varphi$

תרגול: חשבו את האינטגרל.

$$\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$$

כאשר $D=\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ x\ge 0,\ a>0\}$



(5) פתרון: התחום שלנו - זה חצי אליפסואיד.
ניתן לעבור מ-תחום f לתחום של-זה
כדור ע"י שינוי משתנים - כזה:

$$u=\frac{x}{a}\qquad v=\frac{y}{b}\qquad w=\frac{z}{c}$$

$$J=\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc \Rightarrow dx\,dy\,dz=abc\,du\,dv\,dw$$

$$D'=\{u^2+v^2+w^2\le 1\}=\text{כדור יחידה}$$

$$\iiint_D=\iiint_{D'}(au)(abc)\,du\,dv\,dw=a^2bc\iiint_{D'}u\,du\,dv\,dw$$

עכשיו אפשר לעבור לקואורדינטות ספריות כאלו:

$$u=r\sin\theta\cos\varphi \qquad \theta\in[0,\pi]$$
$$v=r\sin\theta\sin\varphi \qquad \varphi\in[0,\pi]$$
$$w=r\cos\theta \qquad r\in[0,1]$$

$$\iiint_{D'}=a^2bc\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}(r\cos\theta\sin\varphi)(r^2\sin\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta=\dots=0$$

<u>חישוב נפחים</u>

כדי לחשב את נפח הגוף G נשתמש בנוסחה הבאה:

$$V=\iiint_G dV$$

<u>תרגיל:</u> חשב את נפח הגוף G:

$$G=\{(x,y,z)\mid 1\le x^2+y^2\le 4-z^2\}$$

<u>פתרון:</u> נשתמש בקואורדינטות גליליות:

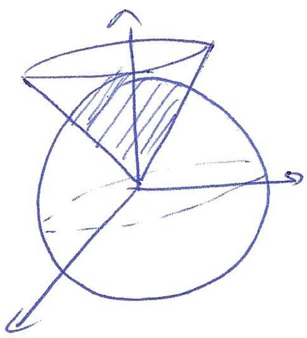
$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$
$$z=z$$

לכל ערך של z התחום של r הוא: $1\le r\le\sqrt{4-z^2}$

אם נסתכל על z לפי כאחוק $0\le z\le\sqrt{3}$. לכן ה
האינטגרל שלנו הוא:

$$\iiint_D dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr\,dz=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r^2}{2}\Big|_1^{\sqrt{4-z^2}}dz=2\sqrt{3}\pi$$

6 **תרגיל:** בעזרת קואורדינטות כדוריות, חשב את הנפח ואת המרכז של הגוף G, החסום ע"י פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה וע"י החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.



פתרון: משוואת המעטפת הכדורית $x^2+y^2+z^2=16$ במערכת כדורית היא $\rho=4$ ומשוואת החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ במערכת כדורית היא:

$$\rho\cos\varphi=\sqrt{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

לאחר פישוט נקבל:

$$\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi$$
$$\tan\varphi=1$$
$$\varphi=\pi/4$$

$$V=\iiint_G dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi\right]_0^4 d\varphi\, d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{64}{3}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4}=\frac{64\pi}{3}(2-\sqrt{2})$$

תרגיל: חשב באמצעות אינטגרל משולש את נפח הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=9$ בין המישורים: $z=1$, $x+z=5$

פתרון:

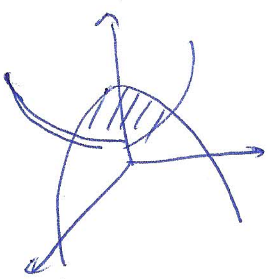
$$\iiint_G dV=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_1^{5-x} dz\, dy\, dx=$$

$$=\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 5-x-1\, dy\, dx=\ldots=8\left[\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx-\underbrace{\int_{-3}^{3}2x\sqrt{9-x^2}\,dx}_{=0}\right]=$$

כי פונק' אי-זוגית בסימטריה

$$=8\left[\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx\right]=72\pi$$

תרגיל: מצא את נפח הגוף הכלוא בין הפרבולואיד $z=5x^2+5y^2$ לפרבולואיד $z=6-7x^2-y^2$



פתרון: נמצא את גבולות האינטגרציה עבור x, y:

$$5x^2+5y^2=6-7x^2-y^2$$
$$\Downarrow$$
$$12x^2+6y^2=6 \Rightarrow 2x^2+y^2=1$$

קיבלנו אליפסה.

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1/\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}}\int_{5x^2+5y^2}^{6-7x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} (6-7x^2-y^2-5x^2-5y^2)\,dy\,dx =$$ (7)

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (6-12x^2-6y^2)\,dy\,dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[6y-12x^2y-2y^3\right]_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} =$$

$$= 8\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)^{3/2}\,dx = \underbrace{\frac{8}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta}_{\circledast} = \frac{3\pi}{2}$$

את האינטגרל $\circledast$ אפשר לחשב לפי הנוסחה:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n u\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n}\frac{\pi}{2} & (\text{זוגי } n\geq 2) \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n} & (\text{אי זוגי } n\geq 3) \end{cases}$$