

תרגול 8

נושא השיעור: גבולות של פונקציות

הגדרת הגבול על פי קושי

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר ממשי L נקרא גבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 ($x \neq x_0$). (נסמן $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$) אם לכל מספר ממשי $0 < \varepsilon < \delta$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

דוגמא

הראה לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

פתרון

יהי $0 < \varepsilon$ נתון. אזי $|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|1-x|}{2|-x-1|} = \frac{|x-1|}{2|-x+1-2|} \leq \frac{|x-1|}{2||x-1|-2|}$

כלומר, צריך למצוא $0 < \delta$ כך שיתקיים $\frac{|x-1|}{2||x-1|-2|} \leq \varepsilon$ לכל x המקיים $0 < |x-1| < \delta$.

נסמן $a = |x-1|$ ואז נקבל $\frac{a}{2|a-2|} \leq \varepsilon$. בכל מקרה נבחר $0 < \delta < 2$ ואז $\frac{a}{4-2a} = \frac{a}{2|a-2|} \leq \varepsilon$ נפתור

את האי שוויון ונקבל שעבור $\delta \leq \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ מתקיים $\frac{|x-1|}{2||x-1|-2|} \leq \varepsilon$ לכל x המקיים $0 < |x-1| < \delta$

כדרוש.

הגדרת הגבול של פונקציה לפי היינה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, כלומר: קיים $0 < \delta$ כך ש $f(x)$ מוגדרת בכל נקודה של הקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, חוץ אולי מהנקודה x_0 עצמה. בתוך הקטע $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ קיימות סדרות שונות של נקודות המתכנסות לגבול x_0 . תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה שמוכלת בקטע הנתון, $x_n \neq x_0$, ושמתכנסת לגבול x_0 . אם נפעיל את הפונקציה $f(x)$ על כל אחד מאיברי הסדרה נקבל סדרת מספרים חדשה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. מספר ממשי L ייקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 ($x \neq x_0$). אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול x_0 וש $x_n \neq x_0$ הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L .

הערה

בד"כ נשתמש בהגדרה על פי היינה כדי לשלול את קיום הגבול. פשוט נמצא שתי סדרות שונות שמתכנסות לגבול x_0 אבל לכל סדרה נקבל שהגבול של הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ שונה.

דוגמא

הראה שלפונקציה $f(x) = \sin \frac{1}{x-2}$ אין גבול בנקודה $x = 2$.

פתרון

ניקח שתי סדרות: סדרה -1 - $x_n = 2 + \frac{1}{\pi n}$, סדרה -2 - $y_n = 2 + \frac{2}{\pi + 4\pi n}$

נשים לב ש $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$

מסדרה 1 נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2 + \frac{1}{\pi n} - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi n) = 0$$

מסדרה 2 נקבל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{2 + \frac{1}{\pi + 4\pi n} - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

הערה

בד"כ לא נשתמש ישירות בהגדרות כדי לחשב גבול של פונקציה אלא נשתמש במשפטים.

כללי אריתמטיקה

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ אם}$$

אז

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M \quad 1$$

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot L \text{ מתקיים } \alpha \text{ מספר ממשי}$$

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M \quad 3$$

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \text{ אם } M \neq 0 \text{ אז}$$

שיטות לחישוב גבול של פונקציה

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e - \text{גבולות חשובים}$$

שיטה 1

$$. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = 0 \text{ אם } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ ופונקציה חסומה ו}$$

דוגמא

$$. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} \sin \frac{1}{x} = 0 \quad 1$$

שיטה 2

$$. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1}{x} = 0 \text{ משיטה 1 נקבל ש } \frac{\infty}{\infty}$$

דוגמא

$$. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{3x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 1}{x^3}}{\frac{3x^3 - 2x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{2}{x}} = 3$$

שיטה 3

גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ - בד"כ ניתן לצמצם ואז להציב את המספר הדרוש.

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)}{(x-1)} = \frac{1}{2}$$

שיטה 4

הכפלה בביטוי הצמוד. שימושי בד"כ שמופיע שורש ומתקיים גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\infty - \infty$.

דוגמאות

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+x} + 2}{\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x\sqrt{4+x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

שיטה 5

גבול מהצורה 1^∞ - בד"כ משתמשים בגבול $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

דוגמה

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2+x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{2}}\right)^{\frac{2}{x-2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

משפט (כלל הסנדביץ')

יהיו $f(x), g(x), h(x)$ שלושה פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, ונניח כי קיימים הגבולות

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \text{ אזי } A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

דוגמה

נתון כי $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ וכי לכל $0 < x < 2$ מתקיים $|f(x) - g(x)| < 3$. הוכח כי $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$

פתרון

נשים לב ש $f(x) - 3 < g(x) < f(x) + 3$ עבור $0 < x < 2$ ז"א קיימת סביבה לנקודה $x = 1$ שעבורה

$$\text{מתקיים } \frac{f(x)-3}{f(x)} < \frac{g(x)}{f(x)} < \frac{f(x)+3}{f(x)} \text{ מכיוון ש } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty \text{ נקבל}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{3}{f(x)} \right) = 1$$

וממשפט הסנדביץ נקבל $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+3}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{3}{f(x)} \right) = 1$$

גבולות חד צדדיים

1 הגדרה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר

ממשי L נקרא הגבול הימני של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 מצד ימין ($x > x_0$). (נסמן

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ אם לכל מספר ממשי } 0 < \varepsilon \text{ קיים } 0 < \delta \text{ כך שלכל } x \text{ המקיים } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\text{מתקיים } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

2 הגדרה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה $x = x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר

ממשי L נקרא הגבול השמאלי של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 מצד שמאל ($x < x_0$). (נסמן

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ אם לכל מספר ממשי } 0 < \varepsilon \text{ קיים } 0 < \delta \text{ כך שלכל } x \text{ המקיים } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\text{מתקיים } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

תרגיל

חשב את הגבול הימני והגבול השמאלי של $f(x) = \frac{3}{5 + 4^{\frac{1}{x-6}}}$ בנקודה $x = 6$.

פתרון

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{3}{5 + 4^{\frac{1}{x-6}}} = 0 \text{ וזאת מכיוון ש } \lim_{x \rightarrow 6^+} 4^{\frac{1}{x-6}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{3}{5 + 4^{\frac{1}{x-6}}} = \frac{3}{5} \text{ וזאת מכיוון ש } \lim_{x \rightarrow 6^-} 4^{\frac{1}{x-6}} = 0$$

הערה

אם הגבולות החד - צדדיים בנקודה נתונה קיימים ושונים, אזי לא קיים הגבול של הפונקציה באותה נקודה.

תרגיל

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & x > 4 \\ -2 & x = 4 \\ 3x^2 + 2a & x < 4 \end{cases} \text{ תהיי } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ כמו כן קיים } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ מהו } a \text{ מהו הגבול?}$$

פתרון

נתון שהגבול $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ קיים ולכן $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ ז"א $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ והגבול

הוא 98.

תרגיל

הוכח כי לא קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$.

פתרון

נשים לב ש $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ אבל $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

רציפות של פונקציה

הגדרה

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x = x_0$. נאמר כי $f(x)$ רציפה בנקודה

$x = x_0$ אם מתמלאים שני התנאים:

א. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ קיים הגבול

ב. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

תרגיל

נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+b)x}{x} & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{x+a}{3x-b} & x < 0 \end{cases}$ מצא את הערכים a, b שעבורם הפונקציה

$f(x)$ רציפה.

פתרון

כדי שהפונקציה $f(x)$ תהייה רציפה צריך להתקיים $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ומכיון ש

$$\begin{cases} a+b=3 \\ -\frac{a}{b}=3 \end{cases} \text{ ז"א } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 = f(0)$$

ואז $a = 4.5, b = -1.5$

משפט ערך הביניים

תהא f רציפה ב $[a, b]$, ונניח ש $f(a) < 0, f(b) > 0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a < c < b$ כך ש

$$f(c) = 0$$

תרגיל

תהיינה $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ פונקציות רציפות. הוכח כי אם g היא על, אז קיימת נקודה $c \in [a, b]$ כך

$$f(c) = g(c)$$

פתרון

נגדיר את הפונקציה $h(x) = g(x) - f(x)$. נתון כי f, g הן פונקציות רציפות בקטע $[a, b]$ ולכן גם h

רציפה בקטע $[a, b]$. (הפרש של פונקציות רציפות).

נתון כי g היא על $[a, b]$ ולכן קיים $x_a \in [a, b]$ כך ש $g(x_a) = a$.

נתון כי g היא על $[a, b]$ ולכן קיים $x_b \in [a, b]$ כך ש $g(x_b) = b$.

נניח ב.ה.ג.כ. ש $x_a < x_b$. מכאן ש

$$h(x_a) = g(x_a) - f(x_a) = a - f(x_a) \leq 0$$

$$h(x_b) = g(x_b) - f(x_b) = b - f(x_b) \geq 0$$

h פונקציה רציפה עבור $[a, b]$ ובפרט רציפה עבור $[x_a, x_b]$ ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה

$$h(c) = 0 \text{ כך ש } x_a \leq c \leq x_b$$