טופולוגיה תרגיל 10 תשע"ז

.1

פתרון: ניקח את הכיסוי הפתוח הבא: נגדיר $U = \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. ונגדיר

$$U_k = U \cup \{k\}$$

זאת בוודאי קבוצה פתוחה כי משלימתה בת מניה. הכיסוי הפתוח שלנו יהיה

$$\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$$

כמובן אין לו תת כיסוי סופי כי אם ניקח תת קבוצה סופית

$$U_{k_1}, \ldots, U_{k_m}$$

היא לא תכסה n כך ש $n \notin \{k_1, \ldots, k_m\}$. לכן הטופולוגיה לא קומפקטית.

.2

פתרון: אם X קומפקטי אז לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי סופי, בפרט זה נכון לכיסוי $\mathcal{B}$. מצד שני אם התנאי לגבי $\mathcal{B}$ נכון. אז ניקח כיסוי פתוח כלשהוא $\{U_i\}_{i\in I}$. לכל $x \in X$ נבחר i_x כך ש

$$x \in U_{i_x}$$

לפי תכונה של בסיס, יש $B_x \in \mathcal{B}$ כך ש

$$x \in B_x \subseteq U_{i_x}$$

כמובן ש $\{B_x\}_{x\in X}$ הוא כיסוי של X ולכן יש תת כיסוי סופי

$$B_{x_1}, \ldots, B_{x_n}$$

ולכן ממילא

$$U_{i_{x_1}}, \ldots, U_{i_{x_n}}$$

הוא תת כיסוי סופי ל X וקיבלנו ש X קומפקטית.

.3

פתרון: מקרה א': $X\backslash A$ היא קבוצה אינסופית. אז לכל $x \in X\backslash A$ אפשר להגדיר

$$U_x = A \cup \{x\}$$

שזו קבוצה פתוחה. כמובן ש

$$\{U_x\}_{x\in X\backslash A}$$

הוא כיסוי פתוח ואין לו תת כיסוי סופי. X לא קומפקטית.

מקרה ב': $X\backslash A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ היא קבוצה סופית. אם $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X אז אפשר לקחת לכל x_k איזשהוא U_{i_k} כך ש $x_k \in U_{i_k}$. כמובן שלכל i_k מתקיים $A \subseteq U_{i_k}$ (כי הם קבוצות פתוחות) ולכן

$$U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$$

הוא תת־כיסוי סופי של X ולכן X קומפקטית.

.4

פתרון:

יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח כי $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \varnothing$. על-פי דה-מורגן נקבל:

$X = \varnothing^c = \bigcup_{i\in I} K_i^{\,c} = \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש- $\{K_i^c\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. נתון ש- X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,\dots,i_n$ כך ש $X = \bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c$. נשתמש שוב בכלל דה-מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$, בסתירה לנתון.

.5

פתרון:

א. יהיו $A_1,\dots,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הינו קומפקטי. יהי $\{U_j\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i \subseteq A \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$ קומפקטי ולכן קיימת תת-קבוצה סופית $F_i \subseteq J$ כך ש $A_i \subseteq \bigcup_{j\in F_i} U_j$. תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. אזי F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{j\in F} U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

ג. F_i קומפקטי לכל $i \in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב-X לכל $i \in I$.
לכן $A = \bigcap_{i \in I} F_i$ סגורה ב-X. יהי $i_0 \in I$ ומתקיים $A \subseteq F_{i_0}$, לכן $A = \bigcap_{i \in I} F_i$
סגורה גם ב-F_{i_0}. מכיון ש-F_{i_0} קומפקטי ו-A ת"מ סגור שלו נקבל ש-
$A = \bigcap_{i \in I} F_i$ ת"מ קומפקטי.

.6

פתרון:

נניח בשלילה ש-$\bigcap_{i=1} E_i = \varnothing$. מתקיים $E_1 \subseteq X = X \setminus \bigcap_{i=1} E_i = \bigcup_{i=1} (X \setminus E_i)$. נתון ש-$E_i$ הם תת-מרחבים קומפקטיים, ולכן כקבוצות, E_i הן תת-קבוצות סגורות.
מכאן $\{X \setminus E_i\}_{i=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח של E_1. מכיוון ש-E_1 קומפקטי, קיים תת-כיסוי סופי: $E_1 \subseteq X \setminus E_{i_1} \cup X \setminus E_{i_2} \cup \ldots \cup X \setminus E_{i_k}$, כאשר בה"כ $E_{i_1} \supseteq E_{i_2} \supseteq \ldots \supseteq E_{i_k}$. לכן, $X \setminus E_{i_1} \subseteq \ldots \subseteq X \setminus E_{i_k}$ ומכאן $E_1 \subseteq X \setminus E_{i_k}$ וזו סתירה לכך ש-$E_1 \supseteq E_{i_k} \neq \varnothing$.

דוגמה נגדית: למשל ב-$\mathbb{R}$ ניתן לקחת את $E_i = \left(0, \frac{1}{i}\right)$ או את $E_i = [i, \infty)$.

.7

פתרון:

א. נניח בשלילה ש-(X, τ) הוא האוסדורף. כל תת-מרחב הוא קומפקטי ולכן סגור. לכן τ היא הטופולוגיה הדיסקרטית. ראינו שמ"ט דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי. שימו לב ש-X הוא קומפקטי ודיסקרטי ולכן סופי, בסתירה לנתון.

ב. תת-מרחבים קומפקטיים: כל הנקודונים. ברור שיש מספר לא בן מניה של נקודונים.
תת-מרחבים לא קומפקטיים: כל המרחבים מהצורה $X \setminus \{x\}$. ברור שיש מספר לא בן מניה של מרחבים כאלה. נראה מדוע הם לא קומפקטיים.
נניח בשלילה ש-$X \setminus \{x\}$ קומפקטי. מכיוון שגם $\{x\}$ קומפקטי, נקבל ש-$X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\}$ קומפקטי (תרגיל 4 א' בקובץ הנוכחי), בסתירה לנתון.

ג. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ונמצא תת-כיסוי סופי. נבחר את אחת הקבוצות הלא ריקות מהכיסוי U_{i_0} (אם כולן ריקות, אז גם X ריקה ולכן הטענה ברורה). אם $U_{i_0}=X$ סיימנו. אחרת המשלים $X\setminus U_{i_0}$ הוא סגור ולא טריויאלי ולכן קומפקטי. $\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של $X\setminus U_{i_0}$ ב- X ולכן קיים לו תת-כיסוי סופי: $\{U_{i_j}\}_{j=1}^{n}$. נקבל ש- $X=\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}\right)\cup U_{i_o}$.