דף 1

משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול חזרה

שאלה ממבחן: תשע"א - מועד א' (שאלה 1)

$$\frac{dy}{dx} = y - 2qxy^3$$

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה כאשר q הוא קבוע חיובי.

מצא את הפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=-1$. האם פתרון זה מוגדר לכל x ממשי? אם כן, מהו $\lim_{x\to\infty} y(x)$?

פתרון: תזכורת משוואת ברנולי:

$$y' = a(x)y + b(x)y^{k+1}$$

אם $k \neq 0,1$ מציבים

$$z = \frac{1}{y^k}$$

במקרה שלנו $k=2$ ולכן נציב

$$z = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{y^3}\cdot y' \underset{\text{מהמשוואה}}{=} -\frac{2}{y^3}\left(y - 2qxy^3\right) = -\frac{2}{y^2} + 4qx \underset{z=\frac{1}{y^2}}{=} -2z + 4qx$$

בסה"כ

$$z' = -2z + 4qx$$

חלק הומוגני:

$$\frac{dz}{z} = -2dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = -2x + c \Rightarrow \boxed{z = ke^{-2x}}$$

עבור חלק לא הומוגני:

$$z_p = k(x)e^{-2x}$$

$$z_p' = k'(x)e^{-2x} - 2k(x)e^{-2x}$$

נציב במ' הומוגני עבור z ונקבל:

$$k'(x)e^{-2x} - \cancel{2k(x)e^{-2x}} = -\cancel{2k(x)e^{-2x}} + 4qx$$

$$k'(x) = 4qxe^{2x}$$

$$k(x) = \int 4qxe^{2x}dx \underset{\text{אינט' בחלקים}}{=} q(2x-1)e^{2x} + C$$

מתנאי התחלה $y(0)=-1$ ולכן $z(0)=1$

$\Rightarrow k(0)=1 \Rightarrow 1=-q+C \Rightarrow C=1+q$

$k(x)=1+q\left(1+(2x-1)e^{2x}\right)$

$\Rightarrow z(x)=e^{-2x}+q\left(e^{-2x}+2x-1\right)$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=-\frac{1}{\sqrt{e^{-2x}+q\left(e^{-2x}+2x-1\right)}}}$$

בוחרים בפתרון השלילי מאחר ותנאי התחלה $y(0)=-1$.

ג"ה!

$\frac{dk}{dx}=0 \iff x=0$, ל-$k(x)$ יש מינימום ב-$x=0$, $z(x)$
גדל כש-x גדל $\Leftarrow$ $z(x)\geq z(0)=1$ ומכאן
$y(x)=-\frac{1}{\sqrt{z(x)}}$ מוגדרת לכל x

לפי הפתרון שקיבלנו

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=0$$

תשע"ב מועד א'

2. על וריאציית המקדמים, הוכח שהפתרון של הבעיה

$$x''+2x'+2x=f(t), \quad x(0)=1, \quad x'(0)=0$$

הוא

$$x(t)=\int_0^t e^{t'-t}\sin(t-t')f(t')\,dt'+e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

את המשך השאלה פתרנו בתרגול האחרון, ההמשך נוגע להתמרת לפלס. ומומלץ לחזור עליה.

2-ב)

פתרון: תחילה מהחלק ההומוגני נגיע למ. מאפיינית $\lambda^2+2\lambda+2=0$

שפתרונותיה $\lambda_{1,2}=-1\pm i$

ולכן הפתרון מקבל את הצורה: $x(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t$

נשתמש בוריאציית המקדמים לפיה:

$$c_i(t)=\int_0^t \frac{W_i(t')}{W(t')}dt'+k_i \longrightarrow \text{קבוע} \qquad i=1,2$$

כאשר מהחלק ההומוגני אנו רואים כי שני פתרונות בת"ל עבור המשוואה יהיו $e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t$

$$\Rightarrow W(t)=\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ -e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t & -e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t \end{vmatrix}=e^{-2t}$$

$$W_1(t)=\begin{vmatrix} 0 & e^{-t}\sin t \\ f(t) & -e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t \end{vmatrix}=-e^{-t}\sin t\cdot f(t)$$

$$W_2(t)=\begin{vmatrix} e^{-t}\cos t & 0 \\ -e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t & f(t) \end{vmatrix}=e^{-t}\cos t\cdot f(t)$$

$$\Rightarrow c_1(t)=\int_0^t -e^{t'}\sin t' f(t')dt'+k_1$$

$$c_2(t)=\int_0^t e^{t'}\cos t' f(t')dt'+k_2$$

והפתרון:

$$x(t)=\int_0^t -e^{t'-t}\sin t'\cos t\, f(t')dt'+k_1e^{-t}\cos t$$

$$+\int_0^t e^{t'-t}\sin t\cos t' f(t')dt'+k_2e^{-t}\sin t=$$

$$=\int_0^t e^{t'-t}\sin(t-t')f(t')dt'+k_1e^{-t}\cos t+k_2e^{-t}\sin t$$

$x(0)=\boxed{k_1=1}$

$x'(0)=-1+k_2=0\Rightarrow \boxed{k_2=1}$

וסיימנו.

$3xy'' + y' - y = 0$ (5)

$y'' + \frac{y'}{3x} - \frac{y}{3x} = 0$

$\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{1}{3x} = \boxed{\frac{1}{3}}$ $\quad \lim_{x\to 0} x^2\cdot\frac{1}{3x} = \boxed{0}$

$\Rightarrow$ $x=0$ פיתוח סביב נקודה זו

$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ ננחש פתרון בשיטת פרוביניוס בצורה

$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1}$; $y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-2}$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}3(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0$$

נשווה מקדמים של החזקה הנמוכה כאשר n=0

$$3\lambda(\lambda-1)a_0 x^{\lambda-1} + \lambda a_0 x^{\lambda-1} = 0 \quad / : a_0 x^{\lambda-1} \neq 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

$\Rightarrow 3\lambda^2 - 2\lambda = 0$ משוואה אינדיציאלית

$\lambda(3\lambda-2)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$ $\boxed{\lambda_2 = \frac{2}{3}}$

נחזור לטורים וכעת נתחיל מ n=1

$$\sum_{n=1}^{\infty}3(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda-1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}3(n+\lambda+1)(n+\lambda)a_{n+1}x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda+1)a_{n+1}x^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda} = 0$$

נשווה מקדמים:

$3(n+\lambda+1)(n+\lambda)a_{n+1} + (n+\lambda+1)a_{n+1} = a_n$

$a_{n+1}\left[(n+\lambda+1)(3(n+\lambda)+1)\right] = a_n$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+\lambda+1)(3n+3\lambda+1)}}$$

הרקורסיה המתקבלת

המשך 5 · עבור $\boxed{\lambda=0}$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(3n+1)}$$

נציב:

$n=0$: $a_1=\frac{a_0}{1}=a_0$

$n=1$: $a_2=\frac{a_1}{2\cdot 4}=\frac{a_0}{2\cdot 4}$

$n=2$: $a_3=\frac{a_2}{3\cdot 7}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7}$

$n=3$: $a_4=\frac{a_3}{4\cdot 10}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4^2\cdot 7\cdot 10}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 7\cdot 10}$

$\vdots$

$$\boxed{a_n=\frac{a_0}{n!\cdot\prod_{j=1}^{n}(3j+1)}} \qquad a_n=\frac{a_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n\cdot n!\cdot\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}$$

עבור $\boxed{\lambda=\frac{2}{3}}$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{\left(n+\frac{5}{3}\right)(3n+3)}=\frac{a_n}{(3n+5)(n+1)}$$

$n=0$ $a_1=\frac{a_0}{5}$

$n=1$ $a_2=\frac{a_1}{8\cdot 2}=\frac{a_0}{2\cdot 5\cdot 8}$

$n=2$: $a_3=\frac{a_2}{11\cdot 3}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 11}$

$n=3$: $a_4=\frac{a_3}{14\cdot 4}=\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}=$

$\vdots$

$$\boxed{a_n=\frac{a_0}{n!\prod_{j=1}^{n}(3j+2)}} \qquad a_n=\frac{a_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^n\cdot n!\cdot\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)}$$

הפתרון (עד כדי כפל בקבוע):

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)}$$

הפתרון (עד כדי כפל בקבוע):

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+\frac{2}{3}}}{3^n\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{5}{3}\right)}$$

לעיל מוצגים הפתרונות המתקבלים מכל ניחוש וכלל רקורסיה שונה. צירוף לינארי שלהם יהיה הפתרון הכללי

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע של A.

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\cdot(\lambda^2-1) - 1\cdot(-\lambda-1) + 1\cdot(1+\lambda) =$$

$$= -\lambda^3+\lambda+\lambda+1+1+\lambda = 0$$

$$-\lambda^3+3\lambda+2=0$$

$\lambda=-1$ מהווה פתרון

$$-(-1)^3-3+2 = 1-3+2=0$$

נבצע חלוקת פולינומים

$$\begin{array}{l} \quad -\lambda^2+\lambda+2 \\ \hline -\lambda^3+3\lambda+2 \;\big|\; \lambda+1 \\ \underline{-\lambda^3-\lambda^2} \\ = \lambda^2+3\lambda+2 \\ \underline{\quad \lambda^2+\lambda} \\ = \quad 2\lambda+2 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\lambda^2-2\lambda+\lambda-2=0$$

$$\lambda(\lambda-2)+1(\lambda-2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-1 \qquad \lambda=2$$

ובסה"כ קיבלנו ע"ע כפול $\lambda=-1$ וע"ע $\lambda=2$

נמצא וקטורים עצמיים עבור $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2x \\ x+z=2y \\ x+y=2z \Rightarrow y=2z-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+z = 4z-2x$$

$$3x=3z \Rightarrow x=z \qquad \Rightarrow 2x=2y$$

$$x=y$$

וניתן לבחור ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

המשך 6 עבור $\lambda = -1$

$$\begin{cases} y+z = -x \\ x+z = -y \\ x+y = -z \end{cases} \Rightarrow \text{אותן משוואות}$$

$$-\begin{cases} y+z = -x \\ x+z = -y \end{cases}$$

$$y - x = -x + y$$

נבחר $x = 1$ $y = 0$ $\Rightarrow z = -1$

נבחר $x = 0$, $y = 1$ $z = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ונקבל עצמ"ים שני וקטורים בת"ל עבור $\lambda = -1$

ובסה"כ הפתרון הכללי של המערכת יהיה

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

נחפש פתרון פרטי מהצורה:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \\ e+ft \end{pmatrix}$$

ואז נקבל:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \\ e+ft \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+dt+e+ft+t \\ a+bt+e+ft \\ a+bt+c+dt \end{pmatrix}$$

נשווה מקדמים ונקבל:

$$\begin{cases} b = c+e \\ d = a+e \\ f = a+c \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = d+f+1 \\ 0 = b+f \Rightarrow f = -b \\ 0 = b+d \Rightarrow d = -b \end{cases} \Rightarrow -b-b+1 = 0$$

$$b = \frac{1}{2}$$

המשך 6

$$\begin{cases} b = c+e \\ d = a+e \\ f = a+c \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ f = -\frac{1}{2} \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = c+e \\ -\frac{1}{2} = a+e \\ -\frac{1}{2} = a+c \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} -\frac{1}{2} = a+e \\ -\frac{1}{2} = a+c \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = e - c \Rightarrow e = c$$

$$-\frac{1}{2} = a + \frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$e = \frac{1}{4}$$

ולכן הפתרון הפרטי יהיה

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

ובסה"כ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$