משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול 11

סיכום פתרון מד"ר בעזרת טורי חזקות:

בהינתן המד"ר $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$

נפתור לפי המקרים הבאים:

א. x_0 נקודה אורדינרית/מקדמים אנליטיים:

הפתרון: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n$; a_0, a_1 קבועים חופשיים.

ב. x_0 נקודה סינגולרית רגולרית:

הפתרון בשיטת פרובניוס $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^{n+\alpha}$

כאשר $a_0\neq 0$ ואת α מוצאים מהמשוואה האינדיציאלית (indicial)

(i) $\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{Z}$. מקבלים שני פתרונות - בת"ל וצירופם הלינארי מהווה פתרון כללי למד"ר.

(ii) $\alpha_1-\alpha_2\in\mathbb{Z}$. ניקח $\alpha_1\geq\alpha_2$ ונקבל פתרון אחד

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^{n+\alpha_1}$$

ע"י הורדת סדר (הרצאה) מקבלים את הפתרון השני:

$$y_2(x)=k\log(x-x_0)y_1(x)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cdot(x-x_0)^{n+\alpha_2}$$

(natural logarithm) (k קבוע שיכול להתאפס.)

הסבר: החזקות המשותפות לשני הטורים" מוכפלות ב log ובכך באמת ניתן לראות את אי-התלות.

- צ"ל ש y_1 ו y_2 מהווה פתרון כללי.

modified Bessel equation (hyperbolic) / משוואת בסל "המותאמת"

Friedrich Wilhelm Bessel (גרמני)

משוואת בסל "המותאמת" מסדר ν היא:

$$x^2 y'' + x y' - (x^2+\nu^2) y = 0$$ ν (נו או ני) קבוע

נביא את המשוואה לצורה נורמלית:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

$x=0$ נקודה סינגולרית ולכן נבדוק גבולות:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \left[-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)\right] = -\nu^2$$

הגבולות קיימים ולכן $x=0$ סינגולרית רגולרית.

הערה: באינסוף יש סינגולריות לא רגולרית (תרגיל!).

נחפש פתרון סביב הנקודה הסינגולרית רגולרית, בשיטת פרובניוס:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha-1)(n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-2}$$

נציב במשוואה (המקורית) ונקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 a_n x^{n+\alpha} = 0$$

$$(\alpha-1)\alpha a_0 x^{\alpha} + \alpha(1+\alpha)a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} + \alpha a_0 x^{\alpha} + (1+\alpha)a_1 x^{\alpha+1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+2} - \nu^2 a_0 x^{\alpha} - \nu^2 a_1 x^{\alpha+1} - \sum_{n=2}^{\infty}\nu^2 a_n x^{n+\alpha} = 0$$

דף 2

$$\left((\alpha-1)\alpha+\alpha-\nu^2\right)a_0x^\alpha+\left(\alpha(1+\alpha)+1+\alpha-\nu^2\right)a_1x^{\alpha+1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[(n+\alpha+1)(n+\alpha+2)+(n+\alpha+2)-\nu^2\right]a_{n+2}-a_n\right\}\cdot x^{n+\alpha+2}=0$$

מקדמים של x^α

$$\left((\alpha-1)\alpha+\alpha-\nu^2\right)a_0=0$$

דרשנו $a_0\neq 0$ ולכן המשוואה האינדיציאלית:

$$\alpha^2-\nu^2=0 \Rightarrow \boxed{\alpha_{1,2}=\pm\nu}$$

מקדמים של $x^{\alpha+1}$:

$$(\underbrace{\alpha^2-\nu^2}_{=0}+2\alpha+1)a_1=0$$

$$\Rightarrow (2\alpha+1)a_1=0$$

אם $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ אזי $a_1=0$.

מקדמים של $x^{n+\alpha+2}$: עבור $n=0,1,2,\dots$

$$\left[(n+\alpha+2)\left((n+\alpha+1)+1\right)-\nu^2\right]a_{n+2}-a_n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+\alpha+2)^2-\nu^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+\alpha+2+\nu)(n+\alpha+2-\nu)}}$$

כלל נסיגה

עבור $\alpha_1=\nu$ נקבל כלל נסיגה:

$$a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+2+2\nu)(n+2)}$$

נציב n-ים:

$n=0$: $$a_2 = \frac{a_0}{2(2+2\nu)} = \frac{a_0}{2^2(1+\nu)}$$

$n=1$: $$a_3 = \frac{a_1}{\dots} = 0$$

$n=2$: $$a_4 = \frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_2}{2^3(2+\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2!(1+\nu)(2+\nu)}$$

$n=3$: $$a_5 = \frac{a_3}{\dots} = 0$$

$\vdots$

$$a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p} \cdot p! \prod_{j=1}^{p}(\nu+j)} = \frac{a_0}{2^{2p} \cdot p! \frac{\Gamma(p+1+\nu)}{\Gamma(1+\nu)}}$$

$$= \underbrace{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)\cdot a_0}_{\text{לא תלוי ב-}p\text{ נסמן ב-}A_0} \frac{1}{2^{2p+\nu} p!\Gamma(1+p+\nu)} = A_0 \cdot \frac{1}{2^{2p+\nu} \cdot p!\,\Gamma(1+p+\nu)}$$

$$a_{2p+1} = 0$$

ולכן הפתרון הראשון מקבל את הצורה:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\nu} = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p+\nu} = A_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}$$

עבור $A_0=1$ נקבל את פונקציית בסל המותאמת מהסוג הראשון מסדר ν; (פונ' בסל ההיפרבולית)

$$I_\nu(x) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}$$

באופן דומה מקבלים גם את $I_{-\nu}(x)$

כעת אם $\nu \notin \mathbb{Z}$ I_ν ו-$I_{-\nu}$ בת"ל ולכן הפתרון הכללי:

$$\boxed{y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x)}$$

3ב1

אם $\nu \in \mathbb{Z}$ $I_{-\nu}=I_\nu$ (תרגיל) וחסר פתרון נוסף.

כפי שלמדנו בבעיה זו מגדירים את פונ׳ בסל המותאמת מהסוג השני:

$$K_\nu(x):=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

כ״א, אם $\nu=m$ שלם מפרשים את ההגדרה כגבול $\nu \to m$.

I_ν, K_ν פתרונות בת״ל למשוואת בסל המותאמת מסדר ν והפתרון הכללי הינו:

$$\boxed{y(x)=c_1 I_\nu(x)+c_2 K_\nu(x)}$$

תרגיל: פתור $x^2y''+xy'-(x^2-\nu^2)y=0$

מצא את הפתרון הממשי הכללי.

פתרון: זוהי משוואת בסל המותאמת מסדר $i\nu$ ולכן פתרון כללי הינו:

$$y(x)=c_1 I_{i\nu}(x)+c_2 I_{-i\nu}(x)$$

($i\nu \notin \mathbb{Z}$ שכן סדר ומרוכב $I_{-i\nu}, I_{i\nu}$ בת״ל)

נרצה למצוא פתרון ממשי, מ״ל $\overline{y(x)}=y(x)$

$$\overline{y(x)}=\overline{c_1 I_{i\nu}(x)+c_2 I_{-i\nu}(x)}=\overline{c_1}\cdot\overline{I_{i\nu}(x)}+\overline{c_2}\cdot\overline{I_{-i\nu}(x)}=$$

$$=\overline{c_1}\, I_{-i\nu}(x)+\overline{c_2}\, I_{i\nu}(x)\overset{\substack{\text{(נדרוש)}\\ !}}{=}c_2 I_{-i\nu}(x)+c_1 I_{i\nu}(x)\;(=y(x))$$

מהשוואת מקדמים אני דורשים כי $\overline{c_1}=c_2$! $\overline{c_2}=c_1$

לכן אם ניקח $c_1=A+iB \Rightarrow c_2=A-iB$

$$\Rightarrow y(x)=(A+iB)I_{i\nu}(x)+(A-iB)I_{-i\nu}(x)=$$

$$=A\left(I_{i\nu}(x)+I_{-i\nu}(x)\right)+Bi\left(I_{i\nu}(x)-I_{-i\nu}(x)\right)=$$

$$=A\cdot 2\,\mathrm{Re}\left(I_{i\nu}(x)\right)+B\cdot i\cdot 2i\,\mathrm{Im}\left(I_{i\nu}(x)\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{y(x)=C_1\,\mathrm{Re}\left(I_{i\nu}(x)\right)+C_2\,\mathrm{Im}\left(I_{i\nu}(x)\right)}$$

תרגיל פתור

$$x^2y''+3xy'+(1-x)y=0$$

מצא פתרון בשיטת פרובניוס (פתרון אחד) ותאר את הפתרון הכללי.

פתרון: $x=0$ נקודה סינגולרית רגולרית (בדקו)

נחפש פתרון מהצורה $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$; $a_0\neq 0$

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha-1)(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-2}$$

נציב במד"ר ונקבל: (לאחר "משחק" עם המקדמים)

$$(\alpha^2+2\alpha+1)a_0x^{\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+\alpha)(n+\alpha+1)+3(n+\alpha+1)+1]a_{n+1}-a_n\}x^{n+\alpha+1}=0$$

מקדמים x^{α}:

$$\alpha^2+2\alpha+1=0$$
$$(\alpha+1)^2=0 \Rightarrow \alpha_{1,2}=-1$$

מ. אינדיציאלית

מקדמים $x^{n+\alpha+1}$:

$$[(n+\alpha)(n+\alpha+1)+3(n+\alpha+1)+1]a_{n+1}-a_n=0$$

עבור $\alpha=-1$ נקבל

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)^2} \qquad n=0,1,2,\dots$$

$n=0$: $a_1=\frac{a_0}{1^2}$

$n=1$: $a_2=\frac{a_1}{2^2}=\frac{a_0}{1^2\cdot 2^2}$

$n=2$: $a_3=\frac{a_2}{3^2}=\frac{a_0}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}=\frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}$

$\vdots$

$$\boxed{a_n=\frac{a_0}{(n!)^2}}$$

עבור $a_0=1$ נקבל פתרון פרטי:

$$\boxed{y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}x^{n-1}}$$

ניתן אף להמשיך (לא חובה)

$$y_1(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\frac{1}{x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{2\sqrt{x}}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{x}\cdot I_0(2\sqrt{x})$$

שכן

$$I_0(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!\,\Gamma(p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

שורשי המשוואה האינדיציאלית זהים והפתרון השני יקבל את הצורה:

$$\boxed{y_2(x)=\underset{(k=1)}{y_1(x)\log(x)}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^{n-1}}$$

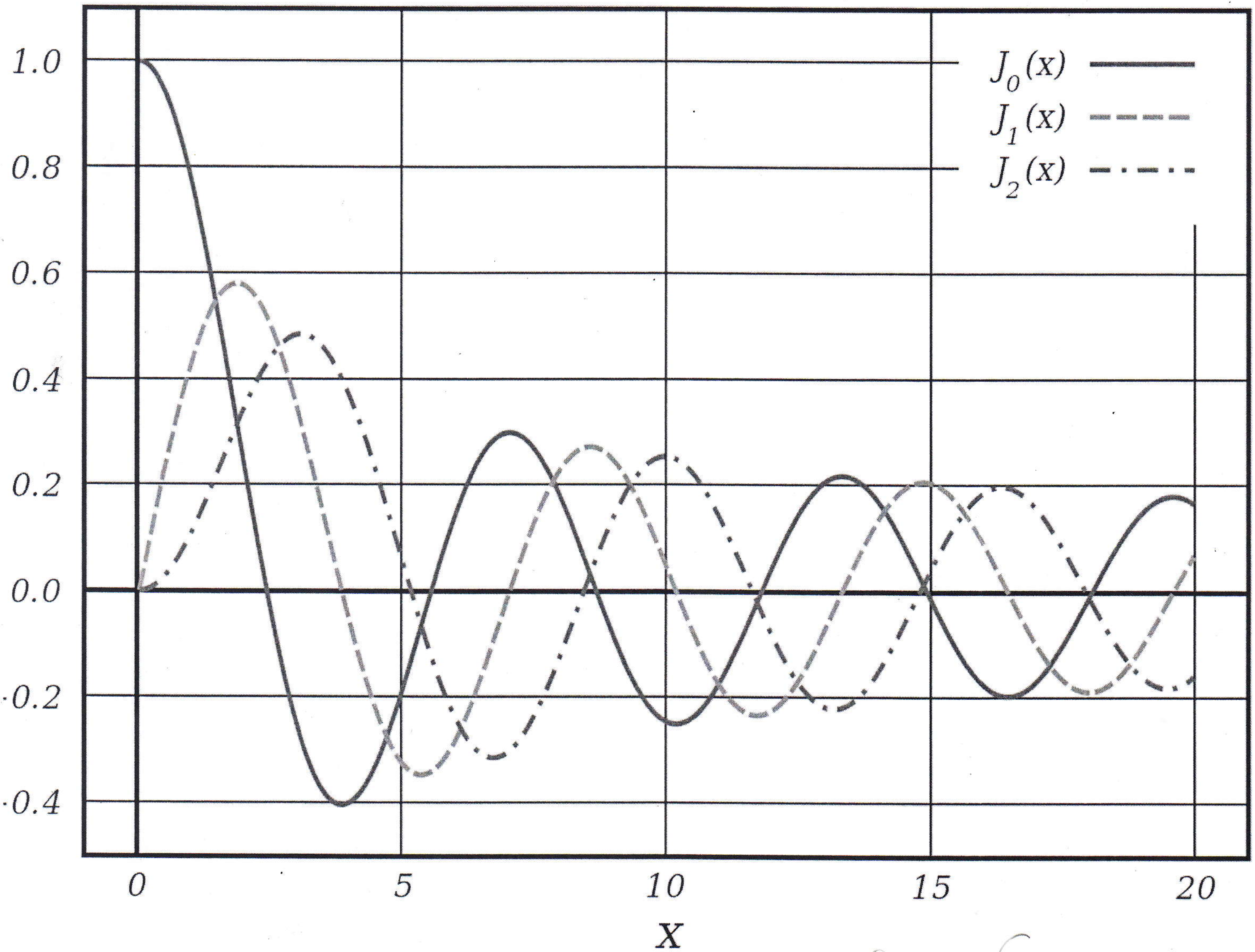
והפתרון הכללי יהיה:

$$y(x)=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)$$

<u>הערה לגבי פונק׳ בסל</u>: בהרצאה ראינו את פונק׳ בסל הרגילה שמתנהגת, עבור x ממשי, בצורה של אוסילציות. $J_\nu(x)$.
בתרגול הכרנו את פונק׳ בסל המותאמות, מהסוג ה-I ומהסוג ה-II
כאשר $I_\nu(x)$ מהסוג הראשון גדלה בצורה אקספוננציאלית (מעריכית)
כפונק׳ של x, ו- $K_\nu(x)$ דועכת בצורה אקספוננציאלית.

הגרפים המצורפים, להלן, מתוך

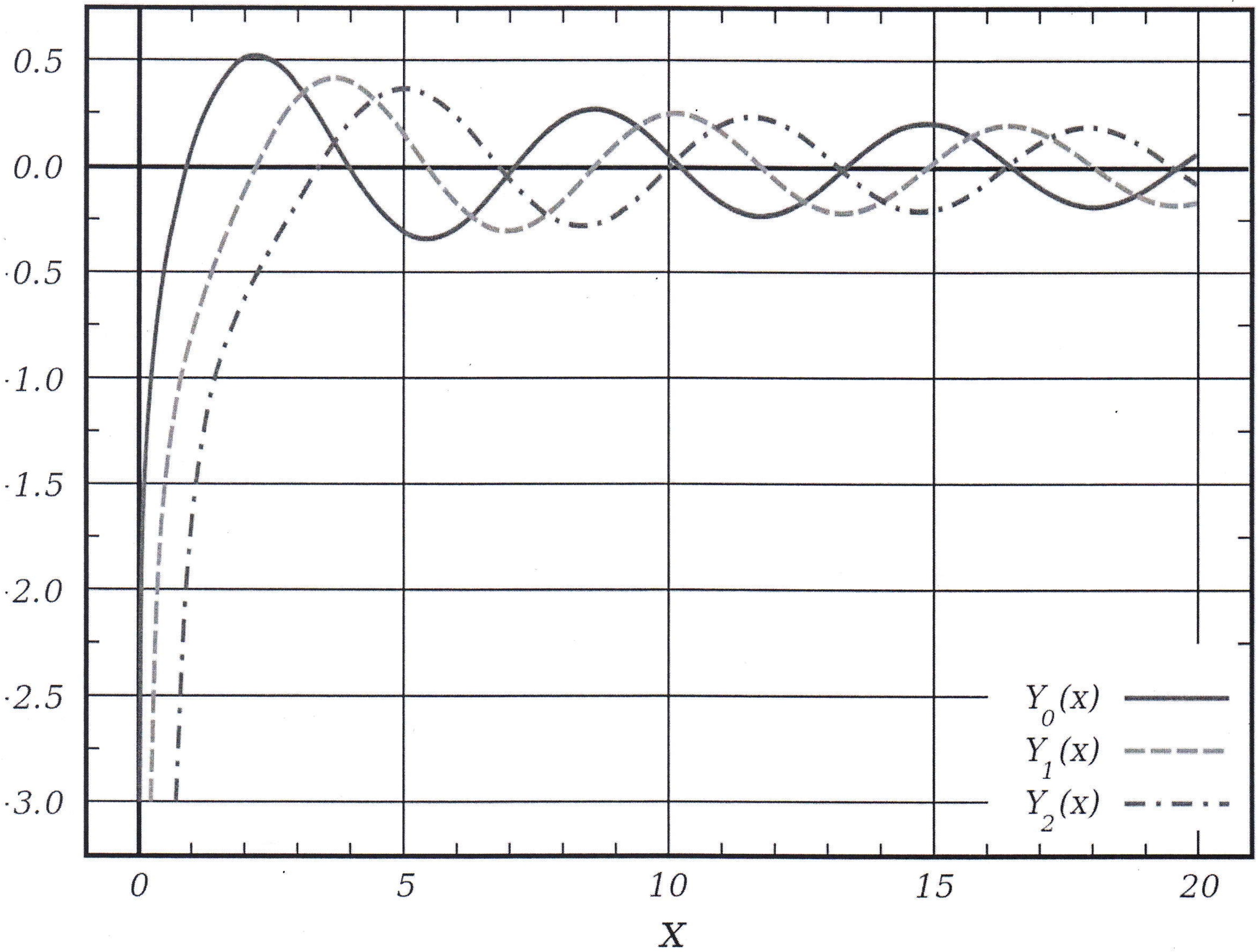
Wikipedia ⟶ Bessel function



משוואת בסל הרגילה $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

פונקציית בסל מהסוג הראשון.

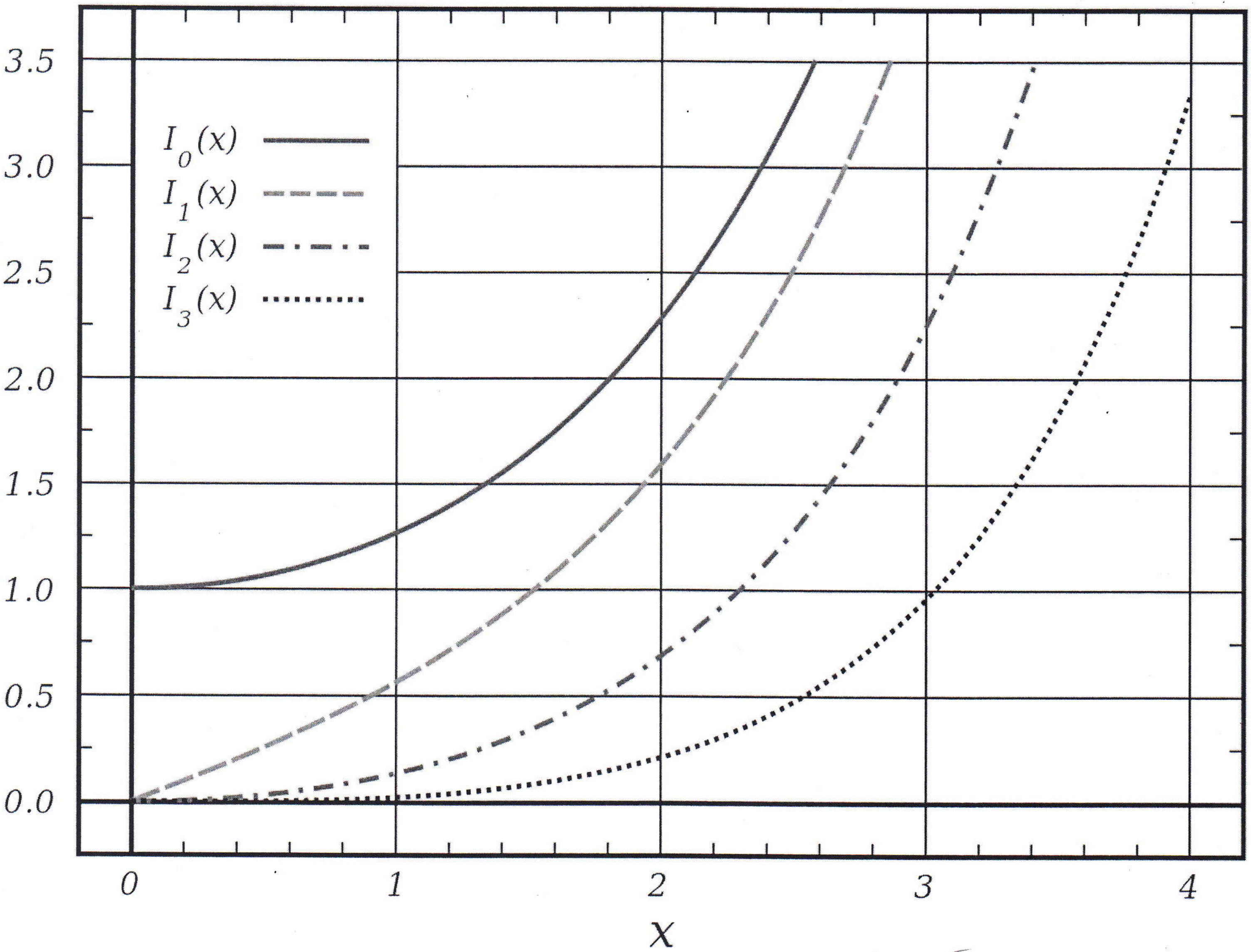
$J_\nu(x)$



פונקציית בסל מהסוג השני

$Y_\nu(x)$

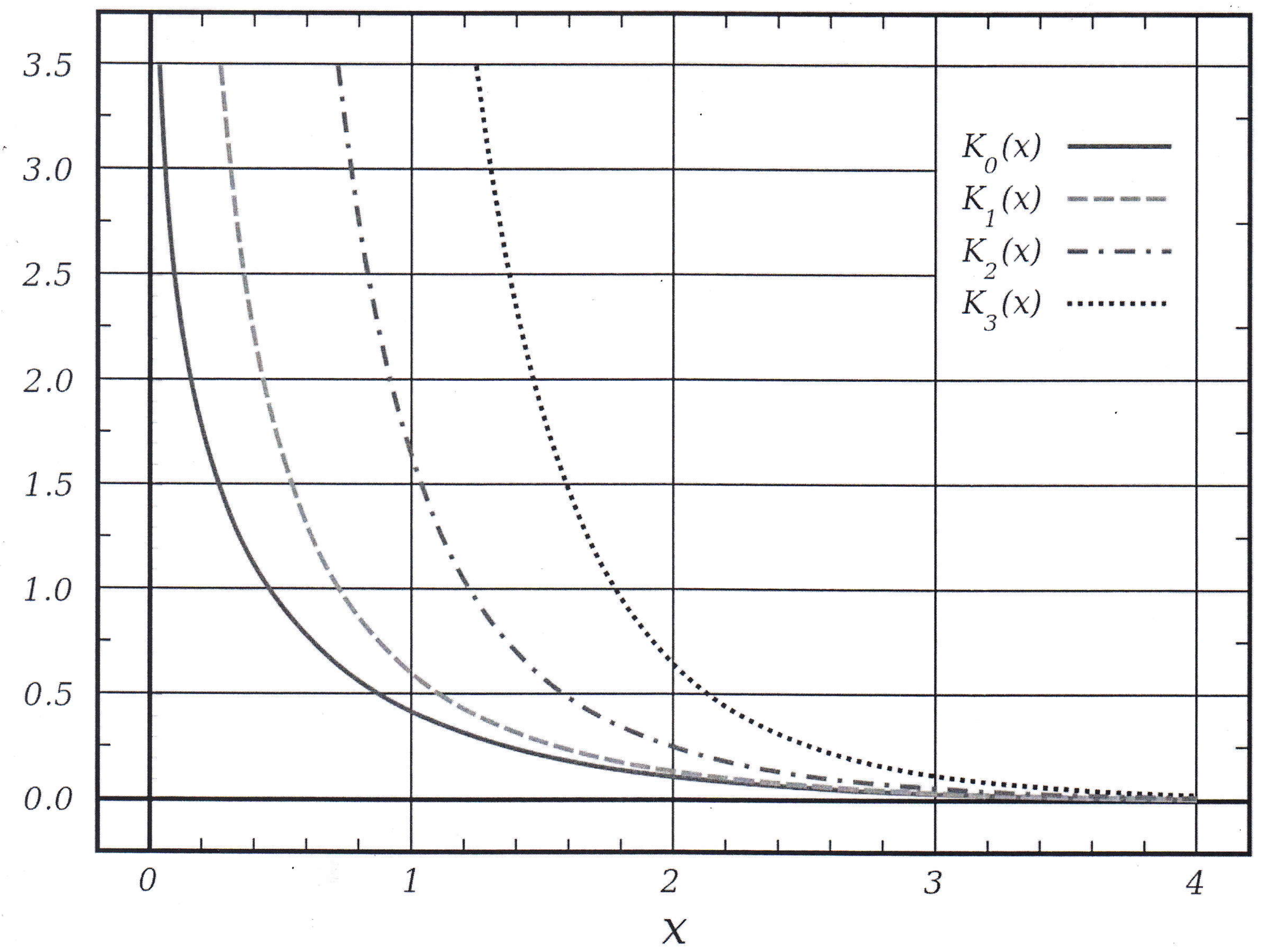
פתרון למשוואת בסל הרגילה.



משוואת בסל "המותאמת" $x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0$

פונקציית בסל המותאמת מהסוג הראשון.

$$I_\nu(x)$$



פונקציית בסל המותאמת מהסוג השני

$$K_\nu(x)$$

פתרון עבור משוואת בסל "המותאמת".