פתרון מבחן 2011 מועד א'

הערה: הפתרון המוצג פה הוא הפתרון שהוצג בשיעור החזרה, בתוספת התיקון מהמייל שנשלח על ידי פרופ' קוניאבסקי.

שאלה 1

נגדיר $X=\mathbb{C}_x^1\setminus\{0,1,2,3\}$, $Y=X\times\mathbb{C}_y^1$, $Z=X\times\mathbb{P}_{\bar{w}}^1$. האם X, Y ו־Z:

- יריעות אפיניות?
- יריעות פרויקטיביות?

שתי הערות לפני הפתרון

הערה 1: בהנחה ש־$\mathbf{k}=\bar{\mathbf{k}}$, ואם V יריעה אפינית אי־פריקה שהיא גם אפינית וגם פרויקטיבית, אזי V היא נקודה.

נימוק: V פרויקטיבית, ולכן על פונקציה רגולרית היא קבועה; $\mathcal{O}_V\cong\mathbf{k}$. אבל V גם אפינית, ולכן $\mathcal{O}_V\cong\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/I(V)$. לכן $\mathbf{k}\cong\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]/I(V)$, כלומר $I(V)$ אידאל מקסימלי, ולכן V היא נקודה (הוכחנו).

הערה 2: אם $X\subseteq\mathbb{A}^n$ קבוצה אפינית, ואם $W\subseteq\mathbb{A}^n$ הוא hypersurface (כלומר, מוגדר על ידי משוואה אחת), אזי גם $X\setminus(X\cap W)$ יריעה אפינית.

פתרון

נגדיר $X'\subseteq\mathbb{A}_{x,y}^2$ על ידי $x(x-1)(x-2)(x-3)y=1$; זו קבוצה אפינית. נוכיח ש־$X\cong X'$, ולכן זו יריעה אפינית.

נגדיר $f:X\to X'$ ו־$g:X'\to X$ על ידי

$$f(x)=\left(x,\frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)}\right)\quad g(x,y)=x$$

אלו מורפיזמים, וברור שהם הופכיים זה לזה; לכן X יריעה אפינית.

לכן, גם $Y=X\times\mathbb{A}^1$ אפינית, כמכפלה של יריעות אפיניות.

לגבי Z - לא למדנו (אבל לא זה ולא זה).

שאלה 2

נתון $X=\left\{w_0^2 w_1 = w_2^2 w_3 - w_3^3\right\} \subseteq \mathbb{P}^3_{\bar{w}}$, ונתונה $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\bar{u}}$ על ידי

$$(w_0 : w_1 : w_2 : w_3) \mapsto (w_0 : w_2 : w_3)$$

האם φ:

- מורפיזם?
- איזומורפיזם?
- איזומורפיזם דו־רציונלי?

פתרון

ההצגה הנתונה אינה מוגדרת ב־$(0:1:0:0) \in X$.

ראשית, נפסול איזומורפיזם: התמונה ההפוכה של $(0:1:0) \in \mathbb{P}^2_{\bar{u}}$ היא $\{(0:a:1:0)\}$, וזהו קו ישר. לכן φ אינו איזומורפיזם, כי יש blow-down.

נבנה $\varphi^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$. כדי למצוא אותו, נרשום את X בקואורדינטות אפיניות $x=\frac{w_0}{w_3}$, $y=\frac{w_1}{w_3}$, $z=\frac{w_2}{w_3}$, כאשר $w_3 \neq 0$. נקבל $X_{\text{af}} : \left\{x^2 y = z^2 - 1\right\} \subseteq \mathbb{A}^3_{x,y,z}$.
נבנה העתקה $\mathbb{A}^2_{u,v} \dashrightarrow X_{\text{af}}$ על ידי

$$(u,v) \mapsto \left(u, \frac{v^2-1}{u^2}, v\right)$$

כעת נחזור לקואורדינטות הומוגניות, ונגדיר $\varphi^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow X$ על ידי (בכתיבה אפינית)

$$(u_0 : u_1 : u_2) \mapsto \left(u_0 : u_2 \cdot \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_0^2} : u_1 : u_2\right)$$

ובכתיב פרויקטיבי,

$$(u_0 : u_1 : u_2) \mapsto \left(u_0^3 : u_2 \cdot \left(u_1^2 - u_2^2\right) : u_0^2 u_1 : u_0^2 u_2\right)$$

נבדוק שהתמונה אכן ב־X: מתקיים

$$\left(u_0^3\right)^2 \cdot \left(u_2 \cdot \left(u_1^2 - u_2^2\right)\right) = u_0^6 u_2 \left(u_1^2 - u_2^2\right) = \left(u_0^2 u_1\right)^2 \cdot \left(u_0^2 u_1\right) - \left(u_0^2 u_2\right)^3$$

כדרוש. יש לנו הופכית שהיא העתקה רציונלית, ולכן φ היא איזומורפיזם דו־רציונאלי.

אבל הקו $(0:1:a)$ עובר לנקודה $(0:1:0:0)$, ולכן יש גם להופכית blow-down, כלומר φ אינו מורפיזם.

שאלה 3

ניקח $A=(0:1:0), B=(1:0:1) \in \mathbb{P}^2$, ונגדיר את L להיות הקו הישר ביניהן. נסתכל על הקוניקות

$$C_{\bar{t}} = \left\{t_0 w_0^2 + t_1 w_1^2 + t_2 w_2^2 + t_3 w_0 w_1 + t_4 w_0 w_2 + t_5 w_1 w_2 = 0\right\}$$

עבור $\bar{t} \in \mathbb{P}^5$. נגדיר $U = \{\bar{t} \mid |C_{\bar{t}} \cap L| = 2\}$. מהי U? האם U אפינית?

פתרון

נמצא את משוואת L. נרשום $L:\bar{w}=\lambda A+\mu B$. לכן $w_0=\mu$, $w_1=\lambda$ ו־$w_2=\mu$, כלומר המשוורה היא $L:w_0=w_2$. נסתכל על החיתוך:

$$C_{\bar{t}}\cap L:\ (t_0+t_2+t_4)\,w_0^2+(t_3+t_5)\,w_0w_1+t_1w_1^2=0$$

לכן

$$U=\left\{\mathcal{D}=(t_3+t_5)^2-4t_1\,(t_0+t_2+t_4)\neq 0\right\}$$

ומכאן $U=\mathbb{P}^5\setminus\{\mathcal{D}=0\}$. זוהי יריעה אפינית (לא למדנו).

שאלה 4

לא בחומר ☺

שאלה 5

נגדיר $X=\left\{xyz-t^2=0\right\}\subseteq\mathbb{A}^4$. מצאו את $\bar{X}\subseteq\mathbb{P}^4$.

פתרון

נרשום $x=\frac{w_1}{w_0}$, $y=\frac{w_2}{w_0}$, $z=\frac{w_3}{w_0}$, $t=\frac{w_4}{w_0}$. לכן המשוואה היא

$$\frac{w_1w_2w_3}{w_0^3}-\frac{w_4^2}{w_0^2}=0$$

כלומר

$$\bar{X}=\left\{w_1w_2w_3-w_0w_4^2=0\right\}\subseteq\mathbb{P}^4_{\bar{w}}$$