הרצאה 10

תזכורת - שקילות עוצמה: $A \sim B$, $|A|=|B|$

$\exists f: A \to B$ חח"ע ועל

- הגדרנו: $|A| \le |B|$:

$\exists f: A \to B$ חח"ע

(כאשר $A,B \neq \emptyset$: שקול לכך ש $\exists g: B \to A$ על)

- אם $f: A \to B$ חח"ע אז: $|A| = |f[A]|$

- משפט קנטור: $|A| \lneq |P(A)|$.

- $|P(A)| = 2^{|A|}$ חזקת עוצמות:

$$|A|^{|B|} = |\{f: B \to A\}|$$

- אריתמטיקה: $|A|+|B|$ (עוצמת האיחוד הזר)

$|A| \cdot |B|$ (עוצמת המכפלה הקרטזית)

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = \aleph$

- ראינו: $\aleph_0 \lneq \aleph$.

$\aleph_0$

טענה: $2^{\aleph_0} \leq \aleph$.

הוכחה: לפי הגדרת חזקת עוצמות:

$$2^{\aleph_0} = |\{0,1\}|^{|\mathbb{N}|} = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| = \left|\{f:\mathbb{N}\to\{0,1\}\}\right|$$

כדי להראות את הדרוש מספיק לבנות פונקציה חח"ע:

$$F:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

נחשוב על $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ כעל סדרות:

$$F(\underset{0,1}{a_1},\underset{0,1}{a_2},\underset{0,1}{a_3},\dots) = 0.a_1a_2a_3\dots \in \mathbb{R}$$

פורמלית:

$$f:\mathbb{N}\to\{0,1\} \rightsquigarrow F(f) = 0.f(1)f(2)f(3)\dots \in \mathbb{R}$$

$$F(\underbrace{\overset{f(1)}{1},\overset{f(2)}{1},\overset{f(3)}{0},1,0,0,1,\dots}_{\text{סדרת } 0,1}) = \underbrace{0.1101001\dots}_{\text{מס' ממשי}}$$

צ"ל: F חח"ע.

תהיינה f,g סדרות שונות, אזי קיים אינדקס שעליו הן מקבלות ערכים שונים, יהי k האינדקס הראשון שמקיים:

$$f(k)\neq g(k)$$

דוגמה:
$$\begin{pmatrix} f = & 1\,0\,1\,1 & \boxed{0} & 1 & \cdots \\ g = & 1\,0\,1\,1 & \boxed{1} & 1 & \cdots \\ & & 5 & & \end{pmatrix}$$

צ"ל: $F(f) \neq F(g)$. נניח בה"כ כי: $f(k)=1,\ g(k)=0$.

מתקיים:
$$\left\{ \begin{array}{l} F(f) = 0.*\cdots*\overset{k}{1}\,000\cdots \\ \vee \\ F(g) = 0.*\cdots*0\,111\cdots \end{array} \right.$$

$$F(f) > 0.*\cdots*05 > F(g)$$

ז"א:
$$F(f)-F(g) > 0.0\cdots0\underset{k}{0}5$$

כלומר:
$$F(f)-F(g) > \frac{5}{10^{k+1}}$$

ולכן $F(f)\neq F(g)$.

<u>מ.ש.ל.</u>

<u>זהירות:</u> יוצרות סדרות של $\{0,1,\dots,9\}^{\mathbb{N}}$ שנותנות את אותו מספר ממשי:

$$F(0,9,9,9,9,\dots) = 0.9999\dots$$
$$F(1,0,0,0,0,\dots) = 1.0000\dots$$

נוכיח שהם שווים:

$$0.9999\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = 9 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^i}}_{q+q^2+\dots = \frac{q}{1-q}} =$$

$$= 9 \cdot \frac{1/10}{1-1/10} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 9 \cdot \frac{1}{9} = \underline{1}$$

השוואת אריתמטיקת עוצמות

<u>טענה:</u> יהיו a,b,c,d עוצמות. אם:

$a \le c,\ b \le d$ אז:

(1) $a+b \le c+d$

(2) $a \cdot b \le c \cdot d$

(3) אם בנוסף $c \neq 0$ אז $a^b \le c^d$.

<u>הוכחה:</u> תהיינה A,B,C,D קבוצות שעוצמותיהן a,b,c,d בהתאמה.

נתון $a \le c$, $b \le d$ ולכן $\exists$ פונק' חח"ע:

$$f: A \to C$$
$$g: B \to D$$

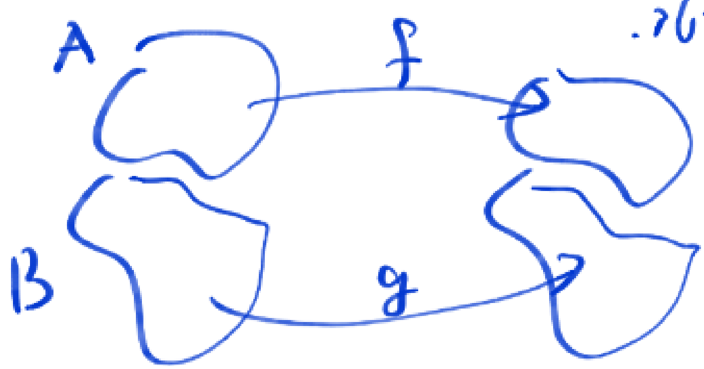
(1) צריך להוכיח $a+b \le c+d$. נבנה פונק' חח"ע:

$$F: A \cup B \to C \cup D$$

$$A \cup B = A\times\{0\} \cup B\times\{1\}, \qquad C \cup D = C\times\{0\} \cup D\times\{1\}$$

$$\begin{cases} F\big((u,0)\big) = \big(f(u),0\big) & , u \in A \\ F\big((v,1)\big) = \big(g(v),1\big) & , v \in B \end{cases}$$

צ"ל: פונק' מוגדרת היטב.



חח"ע: אם $F\big((x,y)\big) = F\big((x',y')\big)$ אז או ש-

א) $y=y'=0$ או:

ב) $y=y'=1$

א) - $x,x' \in A$ ואז $f(x)=f(x') \overset{f \text{ חח"ע}}{\Longrightarrow} x=x'$

ב) - $x,x' \in B$ ואז $g(x)=g(x') \overset{g \text{ חח"ע}}{\Longrightarrow} x=x'$.

(2) להוכיח כי: $a \cdot b \leq c \cdot d$.

נבנה פונקציה חח"ע:

$$F: A \times B \to C \times D$$

נגדיר: $F((x,y)) = (f(x), g(y))$.

נראה חח"ע –

$F((x,y)) = F((x',y')) \Rightarrow (f(x),g(y)) = (f(x'),g(y')) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)=f(x')$ וגם $g(y)=g(y') \xRightarrow{f,g \text{ חח"ע}}$

$\Rightarrow x=x',\ y=y' \Rightarrow (x,y)=(x',y')$.

(3) נניח $c \neq 0$ ונראה:

$a^b \leq c^d$.

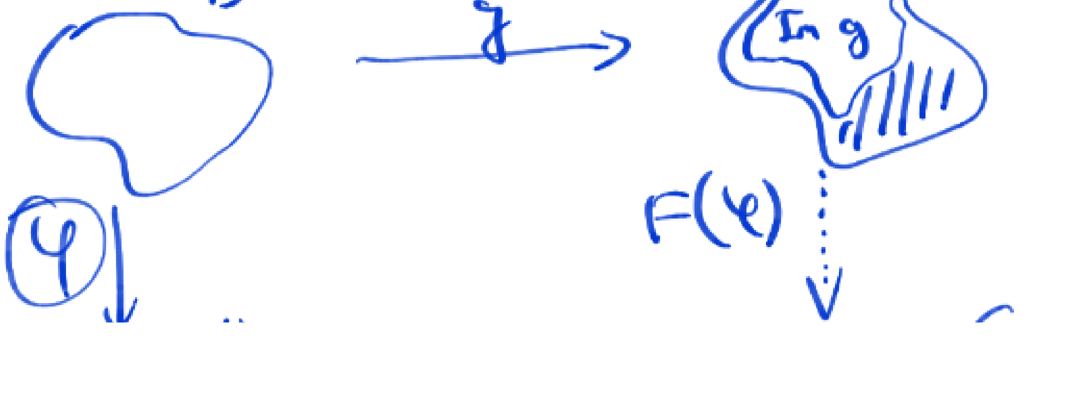
נבנה פונקציה חח"ע:

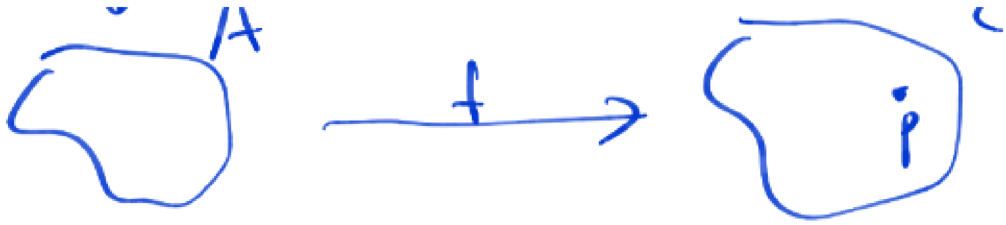
$$F: \underset{\{\varphi : B \to A\}}{\overset{\shortparallel}{A^B}} \longrightarrow \underset{\{\varphi : D \to C\}}{\overset{\shortparallel}{C^D}}$$

יש לך:

$f: A \to C$ חח"ע

$g: B \to D$ חח"ע





יהי $p\in C$ כלשהו. נגדיר:

$$F(\varphi): D \longrightarrow C$$

$$F(\varphi)(w)=\begin{cases} f\circ\varphi\circ g^{-1}(w) = f\left(\varphi\left(g^{-1}(w)\right)\right) & ,w\in \mathrm{Im}\, g \\ p & ,w\notin \mathrm{Im}\, g \end{cases}$$

זו פונק' מוגדרת היטב כיוון שהיא מכסה את כל המקרים,
ובנוסף $w\in \mathrm{Im}\, g$ אז $g^{-1}(w)$ מוגדר היטב בתור
איבר יחיד של B.

נראה כי F חח"ע. נניח $\varphi,\psi\in A^B$ ומתקיים:

phi psi

$$F(\varphi)=F(\psi)$$

בפרט, לכל $y\in B$, עדיין $g(y)\in D \to$.

כדי להראות כי $g(a)\in \mathrm{Im}\, g$ לכל כו:

$$F(\varphi)(g(y)) = f\Big(\varphi\big(g^{-1}(g(y))\big)\Big) =$$
$$= f(\varphi(y))$$

בדומה:

$$F(\psi)(g(y)) = f\Big(\psi\big(g^{-1}(g(y))\big)\Big) =$$
$$= f(\psi(y))$$

אם $F(\varphi)=F(\psi)$, בפרט משתוות בנקודה $g(y)$, לכן:

$$f(\varphi(y)) = f(\psi(y))$$

אבל f חח"ע ולכן: $\varphi(y)=\psi(y)$.

ולכן לכל $y\in B$, $\varphi(y)=\psi(y)$ כלומר $\varphi=\psi$.

מ.ש.ל.

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין

נתחיל בלמה (lemma).

<u>למת נקודת השבת</u>: נניח כי A קבוצה! -

$$F: P(A) \longrightarrow P(A)$$

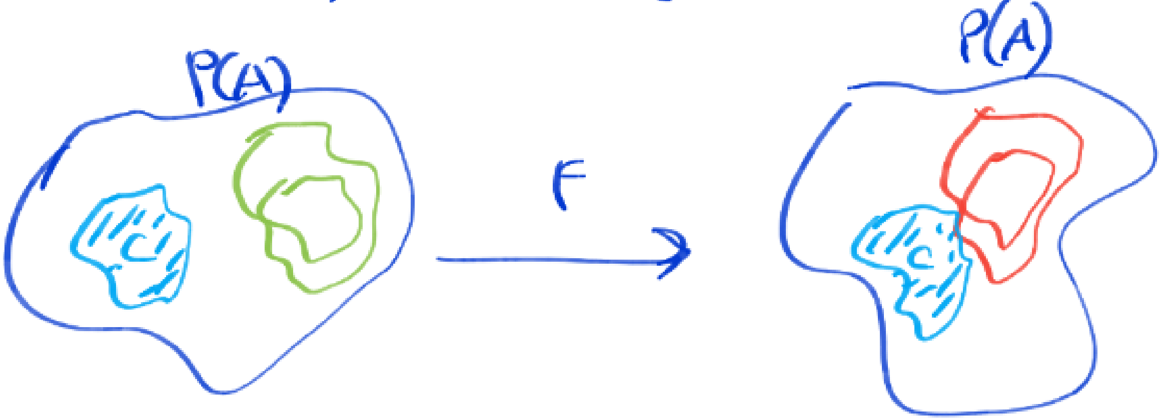
המקיימת "שומרת הכלה":

אם: $X \subseteq Y \quad (\subseteq A)$

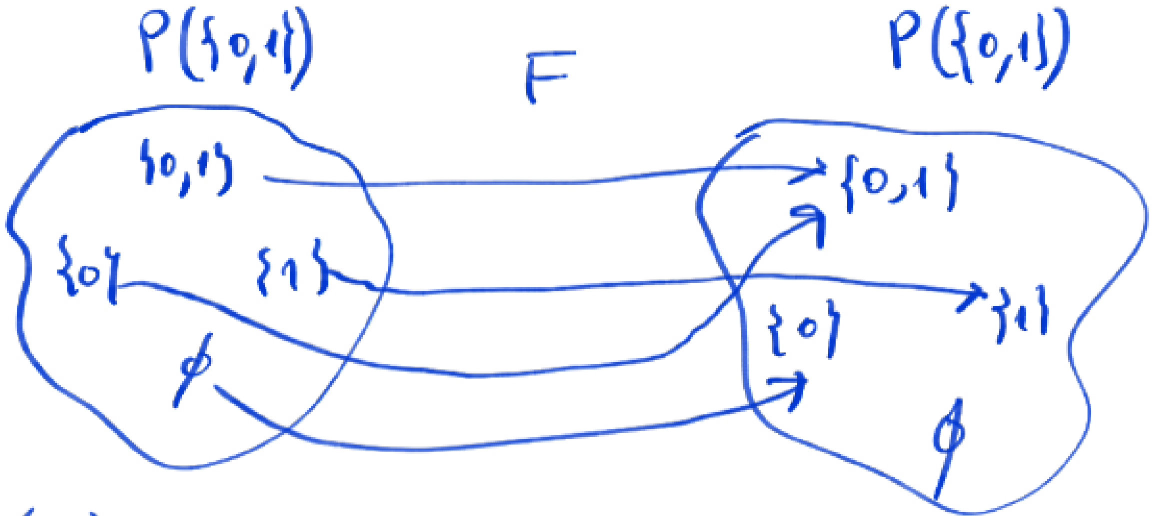
אז: $F(X) \subseteq F(Y)$.

אזי, ל-F קיימת נק' שבת. כלומר:

$$\exists\, C \in P(A) : \quad F(C) = C$$



לדוגמה:



שומרת הכלה. נק' שבת:

$F(\{1\}) = \{1\}$

$F(\{0,1\}) = \{0,1\}$.

הוכחת [illegible] המשפט

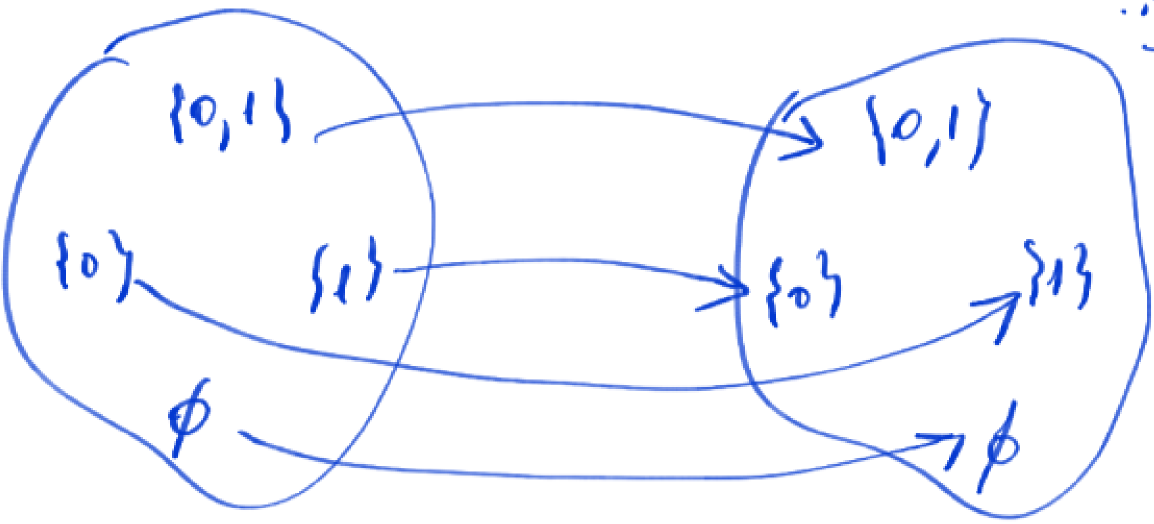
נניח $F: P(A) \to P(A)$ שומרת הכלה.

נוכיח כי ל-F יש נק' שבת.

נתבונן באוסף תתי-הקבוצות של A המוכלות בתמונתן תחת F:

$$\mathcal{L} = \{X \subseteq A \mid X \subseteq F(X)\}$$

דוגמה:



שומרת הכלה, אך $\{0\} \not\subseteq F(\{0\}) = \{1\}$,

בדוגמה זו: $\mathcal{L} = \{\phi, \{0,1\}\}$.

נשים לב כי תמיד $\phi \in \mathcal{L}$ (מכיוון ש- $\phi \subseteq F(\phi)$.)

נגדיר: $C = \bigcup_{X \in \mathcal{L}} X$. כלומר תת-קבוצה של A.

נוכיח כי C נק' שבת של F, $F(C) = C$.

נראה הכלה דו"כ:

($\supseteq$): יהי $c\in C$, אזי קיים $X\in\mathcal{L}$ כך ש- $c\in X$.

אבל $X\in\mathcal{L}$ ולכן: $X\subseteq F(X)$ כלומר $c\in F(X)$.
מתקיים $X\subseteq C$ ולכן מכך ש- F שומרת הכלה נקבל:
$$F(X)\subseteq F(C)$$
ובפרט, $c\in F(C)$. קיבלנו: $C\subseteq F(C)$.

($\subseteq$): ראינו כי $C\subseteq F(C)$. מכך ש- F שומרת הכלה:
$$F(C)\subseteq F(F(C))$$
אבל פירושו ש- $F(C)\in\mathcal{L}$ ובפרט:
$$F(C)\subseteq \bigcup_{X\in\mathcal{L}} X = C.$$
הראינו הכלה דו"כ, ולכן $F(C)=C$ כנדרש.
מ.ש.ל.

11:00

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין (ק.ש.ב.)

אם $|A| \leq |B|$ ו- $|B| \leq |A|$ אז:

$$|A| = |B|.$$

במילים אחרות אם יש פונקציה <u>חח"ע</u>:

$$f: A \to B$$
$$g: B \to A$$

אז יש פונקציה חח"ע ועל $h: A \to B$.

<u>הוכחה</u>: נניח כי לקבוצות A, B קיים ש-

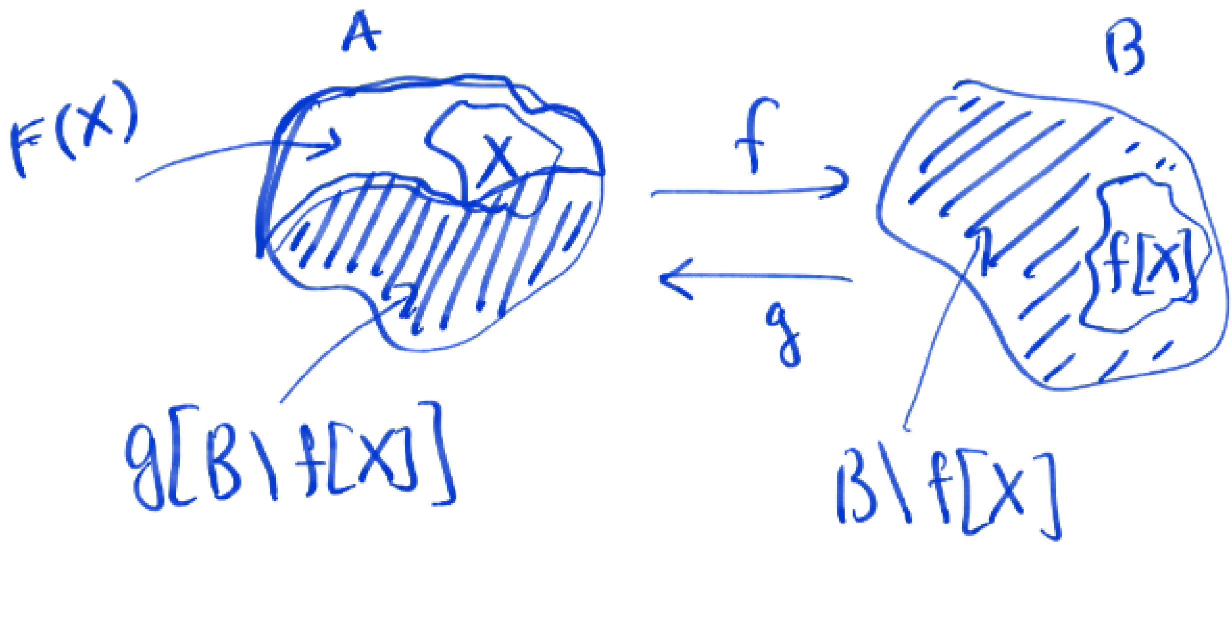
$f: A \to B$ חח"ע

$g: B \to A$ חח"ע

נגדיר:

$$F: P(A) \to P(A)$$

$$X \subseteq A: \quad F(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$$



נראה כי F שומרת הכלה ולכן ממשפט נק' השבת
כי יש נק' שבת.

נניח $X\subseteq Y$. אזי $f[X]\subseteq f[Y]$ ולכן:

$$B\setminus f[X] \supseteq B\setminus f[Y]$$

ולכן:

$$g[B\setminus f[X]] \supseteq g[B\setminus f[Y]]$$

ולכן המשלימים:

$$\underbrace{A\setminus g[B\setminus f[X]]}_{F(X)} \subseteq \underbrace{A\setminus g[B\setminus f[Y]]}_{F(Y)}.$$

הוכחנו כי F שומרת הכלה.
מכאן, לפי משפט נק' השבת ישנה $C\subseteq A$:

$$F(C) = C$$

$$F(C) = A\setminus g[B\setminus f[C]]$$

משמע:

$$g[B\setminus f[C]] = A\setminus C$$

כלומר:

$$A=(A\setminus C)\cup C$$

$$|A| = |A\setminus C| + |C| = |g[B\setminus f[C]]| + |C| =$$

(נזכר כי אם $f:A\to B$ חח"ע אז: $|C|=|f[C]|$)

$$= |g[B\setminus f[C]]| + |f[C]|$$

(כיוון שגם $g:B\to A$ חח"ע: $|B\setminus f[C]|=|g[B\setminus f[C]]|$)

$$= |B\setminus f[C]| + |f[C]| = |B|$$

$B=(B\setminus f[C])\cup f[C]$

מ.ש.ל.

<u>מסקנות, דוגמאות ושימושים</u>

(1) $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

ראינו קודם השבוע בהרצאה היום כי:

$$2^{\aleph_0} \le \aleph.$$

נראה ש:

$\aleph \le 10^{\aleph_0}$. כדי להוכיח זאת,

נבנה פונק' f:

$$f:\{0,1,\dots,9\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$$

$$[0,1] = \{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x\le 1\}$$

$$f(a_1,a_2,a_3,\dots) = 0.a_1a_2a_3\cdots$$

כי $x\in\mathbb{R}$ בקטע $[0,1]$ יש לו פיתוח עשרוני:

כל $x \in$ [illegible] $[0,$ [illegible]

$$0.a_1a_2a_3\ldots \quad (a_n \in \{0,1,\ldots,9\})$$

לכן: $a_1,a_2,a_3,\ldots \in \{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}$ הינה ייצוג עבור x.

כפי שראינו, נקבל:

$$|[0,1]| \le |\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}| = 10^{\aleph_0}$$

אבל:

$$\aleph = |(0,1)| \le |[0,1]|$$

ראינו בהרצאה התאמה:

$$\varphi: \mathbb{R} \to (0,1)$$
$$\varphi(r) = \frac{e^r}{e^r+1}$$

מסקנה: $\aleph \le 10^{\aleph_0}$. אבל:

$$\aleph \le 10^{\aleph_0} \le 16^{\aleph_0} = (2^4)^{\aleph_0} =$$
$$= 2^{4\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

כלומר: $2^{\aleph_0} \le \aleph \le 2^{\aleph_0}$,

מסקנה לפי ק.ש.ב: $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

(2) $\aleph \times \aleph = \aleph$.

קודם: $\aleph \le \aleph_0 \times \aleph$

וגם: $\aleph_0 \times \aleph \le \aleph$.

$$\aleph_0 \times \aleph = \aleph_0 \times 2^{\aleph_0} \underset{\aleph_0 < 2^{\aleph_0} \text{ כי}}{\le} 2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} =$$

$$= 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

(3) $\underline{\aleph \times \aleph = \aleph}$, בדומה מאלוג ל-(2).

(4) $\underline{|\mathbb{Q}| = \aleph_0}$.

מחד: $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}|$

מאידך: חח"ע $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$: $\vec{f}\left(\frac{p}{q}\right) = (p, q)$

<u>בצורה מצומצמת</u>.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = (1, 3)$$
$$f(3) = (3, 1)$$

מסקנה: $|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| =$

$$= |\underbrace{\mathbb{Z}}_{\aleph_0}| \times |\underbrace{\mathbb{N}}_{\aleph_0}| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

לכן ק.ל.ק. $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

(ג) <u>טענה</u>: תהי S קב' בת-מנייה $(|S| \le \aleph_0)$ של קב' קבוצות מנייה.

אזי: $\left|\bigcup_{X\in S} X\right| \le \aleph_0$ (האיחוד בן-מניה).

<u>הוכחה</u>:

נוכיח: $\left|\bigcup_{X\in S} X\right| \le |S| \times \aleph_0$

נבנה פונק' חח"ע: $f: \bigcup_{X\in S} X \to S \times \mathbb{N}$

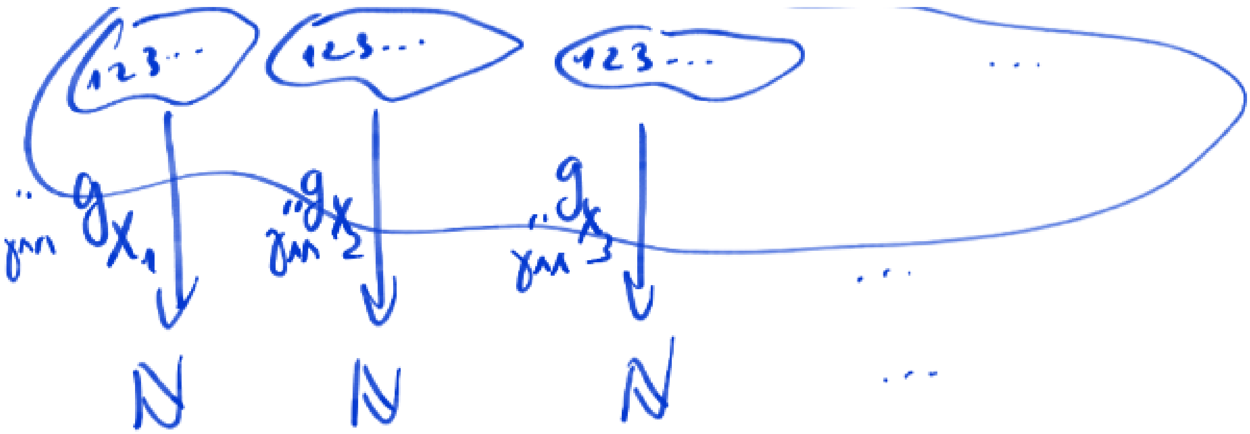
לכל $X \in S$ ידוע כי X בת-מנייה, ולכן יש פונקציה חח"ע, נסמנה $g_X : X \to \mathbb{N}$.

נגדיר: $f: \bigcup_{X\in S} X \to S \times \mathbb{N}$

לכל: יהי $x \in \bigcup_{X\in S} X$, נבחר <u>כלשהו</u> $X \in S$ כך ש- $x \in X$.

נגדיר:

$$f(x) = (\underbrace{X}_{\in S}, \underbrace{g_X(x)}_{\in \mathbb{N}})$$



נגדיר: $f:\bigcup_{X\in S} X \to S\times\mathbb{N}$ חח"ע.

נניח $f(x)=f(y)$

$(X, g_X(x)) = (X', g_{X'}(y))$

לכן, $X=X'$, ולכן $g_{X'}(y)=g_X(y)$. אבל:

$g_X(x)=g_{X'}(y)=g_X(y)$ אך g_X חח"ע ולכן $x=y$.

נסיק: $\left|\bigcup X\right| \le |S\times\mathbb{N}| =$

$$= |S| \times \aleph_0 \underset{|S| \le \aleph_0}{\le} \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

והוכחנו כי האיחוד בן מנ"ה. מ.ש.ל

(6) תהי A קב' תתי-הקב' הסופיות של $\mathbb{N}$.
מהי: $|A|$?

(עצם. $|P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph$.)

נוכיח $|A| = \aleph_0$. לכל $n \in \{0,1,2,\dots\}$
נגדיר:

$$A_n := \{ Y \subseteq \mathbb{N} \mid |Y| = n \}$$

תתי-קב' של $\mathbb{N}$ מגודל n. $(A_0 = \{\emptyset\})$

מתקיים:

$$A = \bigcup_{n \in \{0,1,2,\dots\}} A_n$$

זהו איחוד בן מנ"ה של קבוצות בגודל מנ"ה:

נראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ יש פונק' על:

$$f_n : \mathbb{N}^n \longrightarrow A_n$$

$f_n(m_1,m_2,\dots,m_n) = \{m_1,m_2,\dots,m_n\}$

זוהי: פונק' מוגדר' היטב ועל.

$\left(f(2,6,17,34) = \{2,17,6,34\} \dots \right)$

לכן: $|A_n| \le |\mathbb{N}^n| =$

$= \aleph_0^n = \aleph_0$

כי: $\left(\begin{array}{l} \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \\ \aleph_0 \times \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0 \\ \dots \end{array} \right)$

לעומ' A הינה איחוד בן מנ"ה של קב' בנ' מנ"ה,
ולכן לפי (5),

$|A| \le \aleph_0$.

מצד שני: $f: \mathbb{N} \to A$

$f(n) = \{1,\dots,n\}$ $\left(\text{או: } f(n)=\{n\}\right)$.

מחוץ, ולכן: $\aleph_0 \le |A|$.

מק-ש.ל: $|A| = \aleph_0$.

(7) $2^{\aleph_0} \le \aleph_0^{\aleph_0} \le \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} =$

$$= 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

לפי קש"ק: $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \; (= \aleph)$.

(8) מסקנה מ-(7):

מה עוצמת קב' הסדרות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$?

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph$$

(9) "מה יש יותר" - $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ פונק'$\}$

$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ פונק'$\}$"?

נחשב:

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{R}|} = \aleph_0^{\aleph}.$$

$$2^{\aleph} \le \aleph_0^{\aleph} \underset{\aleph_0 < 2^{\aleph_0}}{\le} (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \times \aleph} \underset{\aleph_0 \times \aleph = \aleph}{=} 2^{\aleph}$$

לפי קש"ק:

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph} = \underline{\underline{2^{\aleph}}}$$

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{N}|} = \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$$

• $|\mathbb{R}\quad| = |\mathbb{R}|\quad = \aleph\quad = (2\quad) =$

$= 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \underline{\underline{\aleph}}$

מכיון כי $|P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$, לפי <u>משפט קנטור</u>:

$\aleph = |\mathbb{R}| \underset{\neq}{\leq} |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$.

(10) תהא: $A = \{$ פונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ <u>חח"ע</u> $\}$.

מהי $|A|$?

קודם כי: $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ולכן:

$|A| \leq |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}|} =$

$= \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} (= \aleph)$

נוכיח את הכיוון השני:

תהא $B \subseteq P(\mathbb{N})$ קב' תתי-הקב' <u>האינסופיות</u> של $\mathbb{N}$.

• $|B| \leq |P(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$

• ראינו כי $|P(\mathbb{N}) \setminus B| \overset{(6)}{=} \aleph_0$ ולכן <u>אילו $|B| < 2^{\aleph_0}$</u>,

היינו מקבלים:

$2^{\aleph_0} = |P(\mathbb{N})| = |P(\mathbb{N}) \setminus B| + |B| =$

$$= \aleph_0 + |B| \underset{\uparrow}{=} \max\{\aleph_0, |B|\} =$$

משפט מלפני ההפסקה

($a+b = \max\{a,b\}$ לעוצמות-אינסופיות, משפט שנלמד בהמשך!)

$$= |B| < 2^{\aleph_0}$$

סתירה. לכן: $|B| = 2^{\aleph_0}$.

כעת, נבנה פונק' חח"ע:

$$f: B \longrightarrow A$$
$$f(X) = f_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

נניח $X \in B$ תת-קב' אינסופית של $\mathbb{N}$.

נגדיר את f_X בתור פונק' חח"ע $f_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$f_X(n) = $ המספר ה-n הכי קטן בקבוצה X

(לדוגמה:

$X = \{2, 5, 3000, 71, 502, \dots\}$

$f_X(1) = 2, \quad f_X(2) = 5, \quad f_X(3) = 71, \dots$)

נר' $f: B \to A$ חח"ע.

נניח $\underset{f(X)}{f_X} = \underset{f(Y)}{f_Y}$ ונראה $X = Y$.

הוכחה של ק — שעורי בית לא להגשה.
(רמז: אינדוקציה.)

לסיכום: $2^{\aleph_0} \le |A| \le 2^{\aleph_0}$,

ולכן מקש"ב: $|A| = 2^{\aleph_0}$.