בס"ד

פתרון תרגיל 7

.1

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&4&2\\1&1&3\end{pmatrix},f_A(x)=(x-2)^2(x-6)$$

$$A^{21}=PD^{21}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^{21}&&\\&2^{21}&\\&&2^{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.25&0.25&0.25\\0.75&-0.25&-0.25\\-0.5&0.5&-0.5\end{pmatrix}$$

.2 תהי $A\in F^{n\times n}$ עם n ע"ע שונים. ז"א שהיות והפולינום האופייני מדרגה n הרי שהוא יראה מהצורה הבאה : $f_A(x)=(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$ כלומר לכל ע"ע הריבוי האלגברי הוא 1. ידוע אי השוויון $1\le ribuy.geo\le ribuy.alg$ ולכן אצלנו נקבל : $1\le ribuy.geo\le 1$ כלומר הריבוי הגאומטרי = 1. ולכן קיבלנו שלכל ע"ע הר"א =ר"ג ובסה"כ יש לנו n ו"ע ולכן היא לכסינה.

.3 נתונה $A=\begin{pmatrix}5&4\\1&8\end{pmatrix}$. A לכסינה (כפי שנראה מיד) ולכן $A=PDP^{-1}$ ולכן אם הע"ע על D הם חיובים הרי שנוכל להוציא "שורש" ונקבל : $A=P\sqrt{D}\sqrt{D}P^{-1}$ ובעצם אפשר "לדחוף" מטריצת יחידה I לכל מקום ולכן : $A=P\sqrt{D}I\sqrt{D}P^{-1}$ אבל ידוע ש $I=P^{-1}P$ כלומר $A=P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1}$ וקיבלנו $A=\underbrace{P\sqrt{D}P^{-1}}_{B}\underbrace{P\sqrt{D}P^{-1}}_{B}=B^2$ ולכן מספיק ללכסן את A ולהוציא שורש. הלכסון הוא : $A=\begin{pmatrix}-4&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.2&0.2\\0.2&0.8\end{pmatrix}$

שימו לב: כאן ל"שורש" של D ישנן 4 אופציות ולכן ישנם 4 פתרונות :

$$B_1=\begin{pmatrix}-4&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.2&0.2\\0.2&0.8\end{pmatrix}\qquad B_3=\begin{pmatrix}-4&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.2&0.2\\0.2&0.8\end{pmatrix}$$

$$B_2=\begin{pmatrix}-4&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.2&0.2\\0.2&0.8\end{pmatrix}\qquad B_4=\begin{pmatrix}-4&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.2&0.2\\0.2&0.8\end{pmatrix}$$

.4 נמצא פ"א ופ"מ:

א. $f_A(x)=(x+1)^2(x-3)$ שזה אומר שישנן 2 אופציות לפ"מ :

$m1_A(x)=(x+1)^2(x-3)$ ו $m2(x)=(x+1)(x-3)$ נבדוק את $m2(x)$ (שהרי את הראשון אין צורך לבדוק – הוא הפ"א...) ונמצא שהמטריצה A מאפסת אותו ולכם הוא הפ"מ.... – ולכן לכסינה

ב. $f_B(x)=(x-3)^3$ ולכן האופציות לפ"מ הן :

$m1_B(x)=(x-3)^3\quad m2_B(x)=(x-3)^2\quad m1_B(x)=(x-3)$

ניתן לראות בבירור ש $m1_B(x)$ לא יכול להיות פ"מ ולכן יש לבדוק רק את האופציה השנייה שעבורה אם נציב את B לא נקבל את – 0 המיוחל – אך אינו מאפס... ולכן הפ"מ הוא הפ"א. ולכן אינה לכסינה

ג. $f_C(x)=m_C(x)=(c-1)^3$ ולכן אינה לכסינה.

ד. $f_D(x)=(x-b)(x^2-ac)$ - נחלק למקרים:

i. אם $a=c=0$ הרי שהיא כבר אלכסונית וממילא לכסינה ☺.

ii. אם רק אחד מהם הוא 0 : $f_D(x)=(x-b)x^2$ במקרה זה אין מספיק ו"ע לע"ע 0 (בדקו) ולכן לא יכולה להיות לכסינה ולכן פ"א=פ"מ.

iii. אם שניהם $\neq 0$: אין מספיק ו"ע לע"ע $\sqrt{ac}$ ואינה לכסינה.

5. $A,B\in F^{n\times n}$.

א. A דומה ל B ולכן קימת P הפיכה כך ש $A=P^{-1}BP$. לפי מה שראינו בשיעור יש להן אותו פ"א. נניח ול-A יש פ"מ $m_A(x)=a_0+a_1x\cdots+a^kx$ וידוע ש$m_A(A)=0$, ולכן

$$0=m_A(A)=a_0I+a_1A\cdots+a^kA=a_0P^{-1}P+a_1P^{-1}BP\cdots+a^kP^{-1}BP= \\ =P^{-1}(a_0I+a_1B\cdots+a^kB)P=0$$ ולכן נקבל

ש $m_A(B)=a_0I+a_1B\cdots+a^kB=0$ ובאותה צורה נקבל גם את ההפך. ולכן נקבל ש $m_A|m_B$ וכן להפך $m_B|m_A$. הם שניהם פולינומים מתוקנים ולכן נקבל שוויון.

ב. אם אחת המטריצות הפיכה אזי $A^{-1}(AB)A=BA$ כלומר AB ו BA דומות ולכן לפי סעיף א'....

6. נתון פולינום כלשהו $f(x)=(x+1)(x+3)$ וכן : $m_A(x)=(x-1)^2$ מהפ"מ אנו מסיקים שלמטריצה A ישנו **<u>ע"ע יחיד</u>** =1 . ולכן הפ"א הוא מהצורה $f_A(x)=(x-1)^k, k\geq 2$ ולכן המטריצות $A+I, A+3I$ הן הפיכות! (אחרת 1- ו 3- היו ע"ע) כלומר :
$f(A)=(A+3I)(A+I)$ וכבר מכאן ניתן לראות שמכפלה של מטריצות הפיכות היא הפיכה......