

1. חשבו את גבולות הסדרות הבאות:

$$a. \quad a_n = \left(\frac{n^2 - 2}{n^2 - 3} \right)^{4n^2 - 1}$$

$$b. \quad \left[\cos^2 \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{1 - \cos \left(\frac{2}{n} \right)}$$

2. הוכיחו: $\overline{\lim} a_n = -\underline{\lim} (-a_n)$

3. תהי סדרה $\{a_n\}$ כך ש $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ו- $\overline{\lim} a_n \cdot \underline{\lim} \frac{1}{a_n} = 1$ הוכח ש $\{a_n\}$ מתכנסת.

4. נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n + b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

מצא את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

5. הוכח שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$

6. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $\begin{cases} a_{2n} = \frac{a_{2n-1}}{2} \\ a_{2n+1} = \frac{1}{2} + a_{2n} \end{cases}$. מצא את הגבולות

החלקיים של $\{a_n\}$. (רמז: מצא את האיברים של $\{a_n\}$ כפונקציה של n - הוכח באמצעות אינדוקציה).

7. תהיינה סדרות חסומות. הוכח כי

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$$

8. הוכיחו/הפריכו: הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת אם ורק אם לכל תת סדרה $\{a_{n_k}\}$ יש תת סדרה

מתכנסת