

תאריך הבחינה: 13.02.2019

שם המרצה: רואי אסרף

שם הקורס: סטטיסטיקה והסתברות

מס' הקורס: 13010022-5

שנה: 2019, סמסטר: א', מועד: א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון ודף נוסחאות מצורף

מבחן מועד א' – סטטיסטיקה והסתברות (5-13010022) סמסטר א', התשע"ט
משך המבחן: 3 שעות תאריך: 13.02.19 חומר עזר: דף נוסחאות מצורף ומחשבון
הוראות: ענה/י על 4 מתוך 6 השאלות הבאות. כל שאלה=27 נק' (100 מקס'). מרצה: רואי אסרף

1. מתוך שאלון 806 קיץ תשע"ז, 2017 (מועד א'):

- בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.
אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של-6 מהם בדיוק יש קלנועית.
א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?
ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות. ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנועית. מהי ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית?
ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיוק יש קלנועית. מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

2. 60% מהמורים בישראל הנם מורים למתמטיקה ו-40% מורים לשאר המקצועות. ידוע כי מספר המורים שלא אוהבים סטטיסטיקה והסתברות גדול פי $1\frac{2}{3}$ ממספר המורים האוהבים סטטיסטיקה והסתברות. לצער משרד החינוך, מבין המורים למתמטיקה 90% לא אוהבים סטטיסטיקה והסתברות. בוחרים באקראי מורה:
א. מהי ההסתברות שהוא מורה למתמטיקה שאוהב הסתברות וסטטיסטיקה?
ב. בהינתן שהמורה אוהב הסתברות וסטטיסטיקה, מהי ההסתברות כי הוא מורה למתמטיקה? בוחרים באקראי 10 מורים:
ג. מהי ההסתברות ש-20% מהמורים שנבחרו הנם מורים למתמטיקה שאוהבים סטטיסטיקה והסתברות?
ד. מהי ההסתברות שלפחות 8 מהמורים שנבחרו הנם מורים למתמטיקה שלא אוהבים סטטיסטיקה והסתברות?

3. נוסחת ההסתברות השלמה:

- אחוז הפלאפונים תוצרת "סמסונג" בהם נתקלים בתופעת "סינדרום המוות הפתאומי" הוא 3%. במעבדת פלא-טק פיתחו בדיקה לאבחון מוקדם של הסינדרום אשר סיכוי הגילוי שלה הוא 80% (ז"א אם הפלאפון בעל הסינדרום אז 80% שיאובחן כך בבדיקה, ואם הפלאפון נקי מהסינדרום אז 80% יאובחן כנקי בבדיקה). פלאפון נבדק ונמצא שהוא בעל הסינדרום. מהו הסיכוי שהוא אכן בעל הסינדרום?

4. התפלגות בדידה:

מספר הלקוחות הנכנסים לסניף "איקאה" בראשון לציון מתפלג פואסוניית עם ממוצע של 3 לקוחות לדקה:

- א. מהי ההסתברות כי בדקה כלשהי יכנסו בדיוק 5 לקוחות לסניף?
 - ב. מהי ההסתברות כי בדקה כלשהי יכנסו לכל היותר 4 לקוחות לסניף?
 - ג. מהי ההסתברות שב-3 דקות יכנסו 9 לקוחות לסניף?
- רמז: השתמש/י בעובדה כי אם $X \sim Pois(\lambda)$ אז $tX \sim Pois(t\lambda)$ כאשר t פרמטר.
- ד. חשבו/י את התוחלת ואת סטיית התקן של מספר הלקוחות הנכנסים לחנות בדקה אחת.
 - ה. מגדירים משתנה מקרי $Z = 3X - 2$, כך ש- X הנו המשתנה המקרי עבור מספר הלקוחות הנכנסים לחנות בדקה. מהי התוחלת ומהי השונות של Z ?

5. התפלגות רציפה:

משקל אנשים באוכלוסיית סין מתפלג נורמלית עם ממוצע של 50 ק"ג וסטית תקן של 15 ק"ג.

- א. מהו אחוז הסינים שמשקלם מתחת ל-55 ק"ג?
- ב. מהו אחוז הסינים שמשקלם מעל 65 ק"ג?
- ג. מהו אחוז הסינים שמשקלם בדיוק 49 ק"ג?
- ד. מהו אחוז הסינים שמשקלם מתחת ל-50 ק"ג?
- ה. מהו אחוז הסינים שמשקלם לכל היותר 50 ק"ג?
- ו. מהו אחוז הסינים שמשקלם סוטה מ-50 ק"ג בלא יותר מ-5 ק"ג?

6. סטטיסטיקה – רווח סמך לתוחלת:

מפעל בובות מייצר בובות פנדה שמשקלם מתפלג נורמלית עם תוחלת 50 גרם וסטית תקן של 1.25 גרם. עקב שיבוש בייצור הועלה חשד כי הבובות אינן מיוצרות במשקל הנדרש. במפעל הוחלט על ביקורת ולשם כך נלקח מדגם מקרי של 36 בובות ונמצא כי משקלן הממוצע הוא 49.2 גרם. נניח כי השונות נותרה ללא שינוי.

- א. מהו רווח הסמך לתוחלת משקל הבובות ברמת מובהקות 2%?
- ב. בונים רווח סמך לתוחלת ברמת ביטחון של 95% ע"י מדגם של מספר בובות פנדה. כמה בובות יש לקחת על מנת שאורכו של רווח הסמך יהיה לכל היותר 1/2?
- ג. בנו רווח סמך בגודל 0.5893 בעזרת מדגם של 49 בובות, מהי רמת המובהקות α ?

דף נוסחאות

הסתברות:

נוסחת ברנולי – ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{להצלחה היא } p \quad \text{כאשר} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad \text{נוסחת בייס}; \quad P(A \cap B) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$$

טבלת התפלגויות:

שונות	תוחלת	פונ' התפלגות מצטברת (הצטברות)	פונ' הסתברות (צפיפות)	סימון	שם	
$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	$\frac{a+b}{2}$		$\frac{1}{b-a+1}$	$X \sim U_d(a,b)$	אחידה בדידה	משתנה בדיד
pq	p		הצלחה p כישלון q	$X \sim \text{Ber}(p)$	ברנולי	
npq	np		$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$X \sim \text{Bin}(n,p)$	בינומית	
$\frac{(1-p)}{p^2}$	$1/p$		$q^{k-1}p$	$X \sim \text{Geo}(p)$	גאומטרית	
λ	λ		$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$	$X \sim \text{Pois}(\lambda)$	פואסונית	
$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}, a \leq x \leq b$	$X \sim U_c(a,b)$	אחידה רציפה	משתנה רציף
$1/\lambda^2$	$1/\lambda$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$X \sim \text{Exp}(\lambda)$	מעריכית	
σ^2	μ	$\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	נורמלית	

תוחלת משתנה מקרי בדיד: $E(X) = \sum_k k \cdot P(X = k)$

תוחלת משתנה מקרי רציף: $E(X) = \int x \cdot f_x(x) dx$ כאשר $f_x(x)$ היא פונקציית הצפיפות.

שונות: $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

תוחלת העתקה (טרנספורמציה) של משתנה מקרי: $E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$

שונות העתקה (טרנספורמציה) של משתנה מקרי: $V[\alpha X + \beta] = \alpha^2 V[X]$

נוסחת התקנון: אם X משתנה מקרי המתפלג נורמלית, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, אזי עבור המשתנה המקרי Z המוגדר ע"י $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ מתקיים:

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

כאשר ערכי הפונקצייה Φ נלקחים מטבלת Z :

$$\Phi(z) = P(Z < z)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

סטטיסטיקה:

רמת מובהקות: α

רמת סמך (רמת בטחון): $1 - \alpha$

רווח סמך לתוחלת כאשר השונות ידועה: $\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

כאשר \bar{X} הוא ממוצע מדגם בגודל n וסטטיית התקן היא σ .

אורך (גודל) רווח הסמך: $L = 2Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

