5/11/13 בס"ד

יחסים

הגדרה: יחס בין קבוצה A לקבוצה B הוא תת קבוצה של $A\times B$.

סימון: במקרה שבשניהם הקבוצה הבאה מקום נסמן $A^2=A\times A$

יחס מ-A ל-A נקרא יחס על A.

דוגמאות: $A=\{1,2,3\}$

$B=\{a,b\}$

← הקבוצה $\{(1,b)\}$ הוא יחס מ-A ל-B.

$\{(1,b),(3,a)\}$

היחס המלא מ-A ל-B הוא $A\times B$

היחס הריק מ-A ל-B הוא $\emptyset$

הגדרה: יחס על קבוצה A נקרא רפלקסיבי אם לכל $a\in A$ הזוג (a,a) ביחס.

סימון: יחס R: $(a,b)\in R$ מסמנים aRb

דוגמה: $A=\{1,2,3\}$ היחס $\{(1,2),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ רפלקסיבי

הגדרה: יחס על קבוצה A נקרא סימטרי אם $\forall a,b\in A.\ aRb\rightarrow bRa$

עכשיו בדוגמה האחרונה את הזוג (2,1). לא צריך להוסיף את כל הזוגות הסימטריים.

הגדרה: יחס על A נקרא טרנזיטיבי אם:

$\forall a,b,c\in A.(aRb\wedge bRc)\rightarrow(aRc)$

דוגמאות: תהי S הקבוצה של $A_1\dots A_n$. נגדיר $R=\{(A_i,A_j)|A_i\subseteq A_j\}$

← היחס הוא רפלקסיבי מכיוון ש-i ו-j יכולים להיות כל אחד מהם

ואז יתכן ש-$i=j \Rightarrow A_i=A_j$

← היחס לא בהכרח סימטרי מכיוון שתתכן הכלה של קבוצה אחת בשניה אבל לא בהכרח ההפך.

← היחס טרנזיטיבי מכיוון ש-$a\subseteq b$ ו-$b\subseteq c \Rightarrow a\subseteq c$

←

הגדרה: יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי נקרא יחס שקילות.

דוגמא: היחס השוויון מעל A הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי, לכן הוא יחס שקילות.

⊝ היחס הריק הוא טרנזיטיבי, סימטרי אבל לא רפלקסיבי ~~באופן~~ (באופן כללי) כי אם יש איבר $a\in A$, אז חסר את (a,a) ביחס.

דוגמא:
$A=\{1,2,3,4\}$

$R=\{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4)\}$

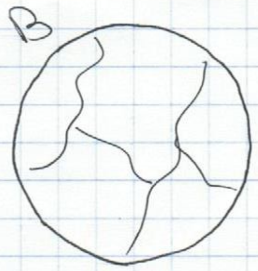
R הוא יחס מעל A. האם R הוא יחס שקילות? כן.

חלוקה

תהי קבוצה B. אוסף של תתי הקבוצות של B נקרא חלוקה, אם מתקיימים:

1) $B=\bigcup_{i\in I} A_i$ — A_i אוסף של תתי קבוצות של B

2) לכל $i\neq j \Leftarrow A_i\cap A_j=\emptyset$



$\{1,3\},\{2\},\{4\}$

• כל יחס שקילות מגדיר חלוקה ולהפך - כל חלוקה מגדירה יחס שקילות.

הגדרה: יהא R יחס שקילות מעל קבוצה A. מחלקת השקילות של $a\in A$ היא הקבוצה - $[a]_R=\{b\in A \mid aRb\}$

הגדרה: אוסף מחלקות השקילות נקרא קבוצת המנה, ומסומן A/R

דוגמא- מחלקות השקילות: $[1]=\{1,3\}$ $[3]=\{1,3\}$

$[2]=\{2\}$ $[4]=\{4\}$

קבוצת המנה=חלוקה: $A/R=\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$

5/11/13 בס"ד

יחסים

סימון - הזוג (a,b) נקרא זוג סדור.

תכונה: $(a,b) = (c,d)$
$$\Updownarrow$$
$$a=c \wedge b=d$$

כלומר: $(a,b) \neq (b,a)$

יש משמעות לדבר כזה (a,a)

$\{a,a\} = \{a\}$

ניתן להגדיר $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

מי האיבר הראשון

אילו איברים יש בקבוצה

צ"ל - $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$
$$\Updownarrow$$
$$a=c \wedge b=d$$

- הוכחה.

דוגמא להגדרה שלא עובדת- $(a,b) = \{a,\{b\}\}$

$(\{c\},d) = \{\{c\},\{d\}\} = (\{d\},c)$

← הזוג הסדור הימני שווה לזוג הסדור השמאלי ← לא נכון לפי הגדרה

תרגיל בית- $(a,b) = \{a,\{a,b\}\}$

הגדרה: יהיו A,B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A ו-B מסומנת $A \times B$

והיא הקבוצה $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ ← מכפלה של כל הזוגות הסדורים.

דוגמא: $A = \{1,2,3\}$

$B = \{\text{משה},2\}$

$\rightarrow A \times B = \{(1,\text{משה}),(2,\text{משה}),(3,\text{משה}),(1,2),(2,2),(3,2)\}$

הערה: באופן כללי $A \times B \neq B \times A$

הערה 2: לכל A ← $\emptyset \times A = \emptyset$