תזכורת

R - תחום ראשי($\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}[x]$)

- כל מודול נוצר סופית הוא מנה של R^n.
- כל תת־מודול של R^n נוצר על ידי לכל היותר n וקטורים.

$\Leftarrow$ אפשר להציג בצורה $A \cdot R^n$ ($A \in M_n(R)$)

$\Leftarrow$ כל מודול נוצר סופית איזומורפי ל$M_A = {}^{R^n}\!/_{A \cdot R^n}$

- $A \sim B \Leftrightarrow$ יש מטריצות הפיכות P, Q כך ש$B = PAQ$.

$A \sim B \Leftrightarrow M_A \cong M_B$

- **משפט:**(R ראשית) כל מטריצה דומה למטריצה קנונית

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad d_1 \mid \cdots \mid d_n$$

הערה

$M_{A \oplus B} \cong M_A \oplus M_B \Leftarrow$

$$M_{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}} \cong \bigoplus M_{(d_i)} = \bigoplus {}^{R}\!/_{Rd_i}$$

משפט

כל <u>מודול</u> נוצר סופית מעל תחום ראשי הוא סכום ישר של מודולים ציקליים

$${}^{\mathbb{Z}}\!/_{\mathbb{Z}d} = \mathbb{Z}_d$$

דוגמה

$$(R = \mathbb{Z}) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_A = \underbrace{{}^{R}\!/_{R \cdot 1}}_{=0} \oplus \underbrace{{}^{R}\!/_{R \cdot 6}}_{={}^{\mathbb{Z}}\!/_{6\mathbb{Z}}} \oplus \underbrace{{}^{R}\!/_{R \cdot 0}}_{=\mathbb{Z}} \oplus \underbrace{{}^{R}\!/_{R \cdot 0}}_{=\mathbb{Z}}$$

מסקנות לגבי מטריצות

$R=\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}$ שדה.

תזכורת: מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ = מ"ו מעל $\mathbb{F}$ + $T:V\to V$.

מהו מודול ציקלי?

$$M=R\cdot w$$

$$M=V=\mathbb{F}[x]\cdot w=\{f(x)\cdot w|f\in\mathbb{F}[x]\}=$$

$$=\{(f(T))(w)\}=\operatorname{span}\left\{w,Tw,T^2w,\dots\right\}$$

דוגמאות

$$T=0$$

V ציקלי $\Leftrightarrow$ קיים $w\in V$ כך ש

$$V=\operatorname{span}\left\{w,Tw,T^2w,\dots\right\}=\operatorname{span}\{w\}=\mathbb{F}\cdot w$$

כנ"ל אם $T=I$

אם $V=\mathbb{F}^3$, $T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix}$, אז

- תת המודול הציקלי הנפרש על ידי $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא $\mathbb{F}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- תת המודול הציקלי הנפרש על ידי $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא כל V.

דוגמה

$V=\mathbb{F}^n$, $T:\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\a_1\\\vdots\\a_{n-1}\end{pmatrix}$ (ולכן $T^n=0$)

מהם כל תת המודולים של V? $\Leftrightarrow$ תת מרחב הגדור לפעולה של T?
עבור $n=4$:

$$0 \subset \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \subset V = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

כל אלו תת מודולים.

הוכחה

אין אחרים:יהי U תת־מודול. יש i מקסימלי כך ש$T^iV \subseteq U$. לכן יש $w \in U$ כך ש$w \notin T^{i+1}V$. תרגיל: $U = T^iV$.

הערה

לכל אופרטור יש מטריצה מייצגת לפי בסיס

$$B = \{b_1, \dots b_n\} \qquad A \in M_n(\mathbb{F}) \qquad T : V \to V$$

$$A = [T]_B \Leftrightarrow \forall_j T(b_j) = \sum_i A_{ij} b_i$$

בסופו של דבר

$$\forall_v [T(v)]_B = [T]_B [v]_B$$

יהי V מודול ציקלי, $T : V \to V$ נתון. כלומר $V = \mathbb{F}[x] \cdot w = \operatorname{span}\{T^i w\}$ עבור w קבוע.

יהי g הפולינום המינימלי של T. לכל f, $f(T) \cdot w = 0$

$$\Downarrow$$

$$\forall_i f(T) T^i w = T^i f(T) w = 0$$

$$\Downarrow$$

$f(T) = 0$ בתור אופרטור על V

$$\Downarrow$$

$$g \mid f$$

$$V \cong {}^{\mathbb{F}[x]}/_{\{f \mid f(x) \cdot w = 0\}} = {}^{\mathbb{F}[x]}/_{\mathbb{F}[x] - g}$$

להיפך: יהי g פולינום ממעלה n. נתבונן במודול $\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]\cdot g$. נתבונן ב-$\overline{1},\overline{x},\dots\overline{x^{n-1}}$ כאשר $\overline{x^i}=x^i+\mathbb{F}[x]\cdot g$. זה בסיס ל-$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]\cdot g$. נכתוב $g=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$.
האופרטור T על V מתאים לכפל ב-x באגף ימין, שהמטריצה המייצגת היא

$$[x]_G=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}=c\left(g\right)$$

$c\left(g\right)$ נקראת המטריצה המלווה של g.

הוכחנו

המודול הציקלי $\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]\cdot g$ איזומורפי למ"ו $V=\mathbb{F}^n$ עם הפעולה $T\left(v\right)=c\left(g\right)\cdot v$.

יהי V מ"ו ממימד סופי עם אופרטור $T:V\to V$. נסמן ב-V_T את המודול V מעל $\mathbb{F}\left[x\right]$ ביחס לפעולה $f\left(x\right)\cdot v=f\left(T\right)v$.

אם $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ נסמן ב-V_n את המ"ו $\mathbb{F}^n$ עם פעולת הכפל בסקלר $x\cdot v=Av$.

למשל - $V_T\cong V_{[T]}$.

V הוא מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$ ולכן גם מעל $\mathbb{F}\left[x\right]\Leftarrow V_T$ איזומורפיזם למודול מהצורה $\mathbb{F}[x]^n/\left(\right)\mathbb{F}[x]^n$.

משפט

תהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. אזי

$$V_A\cong\mathbb{F}[x]^n/\underbrace{\left(x\cdot I-A\right)\mathbb{F}\left[x\right]^n}_{k}$$

($V_A\cong\mathbb{F}^n$ כמודול ביחס לפעולה $xV=Av$)

הוכחה

נסמן ב-$\overline{e}_i$ וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}\left[x\right]^n$ כמודול חופשי מעל $\mathbb{F}\left[x\right]$. נסמן ב-e_i את וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$ כמ"ו מעל $\mathbb{F}$.

נגדיר $\varphi:\mathbb{F}\left[x\right]^n\to V_A$ לפי $\varphi:\overline{e}_i\mapsto e_i$

$$\varphi\begin{pmatrix}g_1\left(x\right)\\ \vdots\\ g_n\left(x\right)\end{pmatrix}=\varphi\left(\sum g_i\left(x\right)\overline{e}_i\right)\overset{g_i(x)\in\mathbb{F}[x]}{=}\sum g_i\left(x\right)\varphi\left(\overline{e}_i\right)=\sum g_i\left(x\right)e_i=\sum g_i\left(A\right)e_i\in\mathbb{F}^n$$

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $V_A\cong\mathbb{F}[x]^n/\ker\varphi$. שימו לב ש-$\mathbb{F}\left[x\right]^n=\sum\mathbb{F}\left[x\right]\overline{e}_i$. נסמן $\overline{V}=\sum\mathbb{F}\overline{e}_i$. נסמן $w_j=x\overline{e}_j-\sum A_{ij}\overline{e}_i$. אלו העמודות של $xI-A$.

נוכיח ש$w_j \in \ker\varphi$:

$$\varphi\left(w_j\right) = xe_j - \sum A_{ij}e_i = Ae_j - \sum A_{ij}e_j = 0$$

ראינו ש $x\overline{e}_j = w_j + \sum a_{ij}\overline{e}_i \in K + \overline{V} \Leftarrow x \cdot \overline{V} = K + \overline{V} \Leftarrow x^l\overline{v} \leq K + \overline{V}$.

$$\mathbb{F}\left[x\right]^n = \sum \mathbb{F}\left[x\right]\overline{e}_i = \mathbb{F}\left[x\right] \cdot \overline{V} \subseteq K + \overline{V}$$

כמובן $\ker\varphi \cap \overline{v} = 0$

$$\ker\varphi = \ker\varphi \cap \mathbb{F}\left[x\right]^n = \ker\varphi \cap \left(\overline{V} + K\right) = \left(\ker\varphi \cap \overline{V}\right) + K = 0 + K = K$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{F}[x]^n/K \cong V_a$$