

...

משפט

עבור S^1 נקבל ש F היא העתקה חח"ע ועל מ $(S^1, 1)$ ל \mathbb{Z} . כלומר F היא איזומורפיזם של חבורות עבור פעולת החיבור ב \mathbb{Z} .

$$F([\varphi][\psi]) = F([\varphi]) + F([\psi])$$

הוכחה

$$\widehat{\varphi \cdot \psi}^0(1) = n + m \quad \text{צ"ל} \quad \begin{matrix} F([\varphi]) = n \\ F([\psi]) = m \end{matrix} \quad \text{נסמן}$$

כשמשרשים את φ ו ψ , שתי המסילות מתחילות ומסתיימות באותה נקודה, אז אין בעיה. אבל כשמשרשים הרמות, אז ההרמה השנייה מתחילה בנקודת הסיום של ההרמה הראשונה - $\widehat{\varphi \cdot \psi}^e = \widehat{\varphi}^e \cdot \widehat{\psi}^{e(1)}$. במקרה שלנו $\widehat{\varphi}^0(1) = n$, ולכן:

$$\widehat{\varphi \cdot \psi}^0 = \widehat{\varphi}^0 \cdot \widehat{\psi}^n(1)$$

כלומר צריך לברר מהו $\widehat{\psi}^n(1)$. אם ידוע לנו ש $\widehat{\psi}^0(1) = m$, נסמן ב $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ את ההעתקה $T_n(t) = t + n$. מתקיים

$$p \circ T_n = p$$

טענה: $T_n \circ \widehat{\psi}^0 = \widehat{\psi}^n$. כלומר אם לוקחים את ההרמה שמתחילה ב 0, ומזיזים אותה ב n , מקבלים את ההרמה שמתחילה ב n .

הוכחה: צריך לברר ש $T_n \circ \widehat{\psi}^0$ הוא הרמה של $\widehat{\psi}^n$ המתחילה ב n .

1. זוהי אכן הרמה של $\widehat{\psi}^n$ כי $\psi \circ T_n \circ \widehat{\psi}^0 = \psi \circ \widehat{\psi}^0 = p \circ \widehat{\psi}^0 = \psi$
2. $T_n \circ \widehat{\psi}^0(0) = T_n(0) = n$, ולכן $T_n \circ \widehat{\psi}^0(1) = T_n(m) = n + m$

תרגיל

יהי $X = U \cup V$, כך ש:

• $U \cap V$ לא ריק וקשיר מסילתית

• U, V פשוטי קשר

אזי X פשוט קשר.

דוגמה

נבחר לדוגמה $n \geq 2$, $U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{5}\}$, $V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{5}\}$. הם כוויצים כי הומאומורפיזם לדיסק פתוח, והחיתוך הומאומורפי ל $S^{n-1} \times (-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. עבור $n \geq 2$ פשוט קשר. עבור $n = 1$ זה עובד - S^1 הוא לא פשוט קשר, כי $U \cap V$ לא קשיר מסילתית.

משפט

עבור $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^2, n \neq 2$.

הוכחה

עבור $n = 1$ הופיעה הוכחה בסמסטר קודם. עבור $n > 2$, נניח בשלילה שקיים הומאומורפיזם $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. אזי $h|_{\mathbb{R}^2 - \{0\}} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$ הוא הומאומורפיזם. כלומר: פשוט קשר $\mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{h(0)\} \simeq S^{n-1}$. לא פשוט קשר (כי $\pi_1(S^n) = \mathbb{Z}$).

משפט

∂D^2 איננו נסג של D^2 .

הוכחה

נניח בשלילה שקיים $r : D^2 \rightarrow \partial D^2$ כך ש $r \circ i = Id_{\partial D^2}$. כלומר $\pi_1(D^2, a) \xrightarrow[r_*]{i_*} \pi_1(\partial D^2, a)$. נבחר נקודת בסיס $a \in \partial D^2$, ואותה נקודת בסיס ב D^2 . אזי

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (Id_{\partial D^2})_* = Id_{\pi_1(\partial D^2, a)}$$

מכאן בפרט i_* חח"ע.

הערה

אותה הוכחה תראה בכל מקרה של נסג $A \subseteq X$ ע"י בחירת נקודת בסיס $a \in A$ ואותה נקודת בסיס $a \in X$ ש $r_* \circ i_* = Id_{\pi(A, a)}$, ובפרט i_* חח"ע.

משפט(משפט נקודת השבת של בראור)

אם $f : D^2 \rightarrow D^2$ רציפה, אז יש $a \in D^2$ כך ש $f(a) = a$.

הוכחה

נניח בשלילה שיש $f : D^2 \rightarrow D^2$ כך ש $f(x) \neq x$ לכל $x \in D^2$, ונבנה $r : D^2 \rightarrow \partial D^2$ באופן הבא:
 בהינתן x , נצייר קרן שיוצאת מ $f(x)$ ועוברת ב x , והחיתוך עם השפה יהיה $r(x)$. זה אפשרי שכן $f(x) \neq x$.
 עבור נקודות על השפה ∂D^2 , $x \in \partial D^2$, הקרן שיוצאת מ $f(x)$ תעבור דרך x ולכן המפגש עם השפה יהיה x .
 קיבלנו נסיגה מ D^2 ל ∂D^2 - וזו סתירה.

משפט(המשפט היסודי של האלגברה)

יהי $p(z)$ פולינום מרוכב ממעלה חיובית. אזי קיים $a \in \mathbb{C}$ כך ש $p(0) = 0$.

הוכחה

בה"כ $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$, $(n > 0)$, ונניח בשלילה ש $p(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
 אזי ע"י צמצום הטווח ניתן לחשוב על p כהעתקה $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$.
 נסמן S_r את המעגל ברדיוס r סביב הראשית. ע"י צמצום התחום ל S_n נקבל העתקה

$$p_r : S_r \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

לכל r ההעתקה p_r היא נול הומוטופית, כי p היא הרחבה של p_r לדיסק ברדיוס r ש S_r היא השפה שלו.
 נסמן $q_r : S_r \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ את ההעתקה $q_r(z) = z^n$. נראה שעבור r מספיק גדול, $p_r \sim q_r$.
 קיים r מספיק גדול כך שאם $|z| = r$ אז

$$q_r(z) \rightarrow |z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| \leftarrow p_r(z) - q_r(z)$$

לכן לכל $z \in S_r$ הקטע המחבר את $q_r(z)$ ל $p_r(z)$ איננו עובר בראשית.
 לכן ניתן לרשום את ההומוטופיה $H : S_r \times I \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$

$$H(z, t) = (1-t)p_r(z) + t(q_r(z))$$

שהיא הומוטופיה מ p_r ל q_r :

$$p_{r*} : \pi_1(S_r, r) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, p_r(r))$$

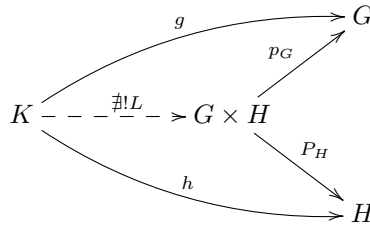
$$q_{r*} : \pi_1(S_r, r) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, q_r(r))$$

כיוון ש $p_r \sim q_r$ קיים איזומורפיזם $F_\gamma : \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, p_r(r)) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, q_r(r))$ כך ש $F_\gamma \circ p_{r*} = q_{r*}$.

$p_{r*} = 0$ ולכן גם $F_\gamma \circ p_{r*} = 0$.
 אם q_{r_0} מעתיקה את היוצר של $\pi_1(S_r, r)$ ל n פעמים כיוצר של $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, r^n)$.

פרק בתורת החבורות

נתונות שתי חבורות G, H . אנו מתעניינים בהומומורפיזמים לתוך G, H :



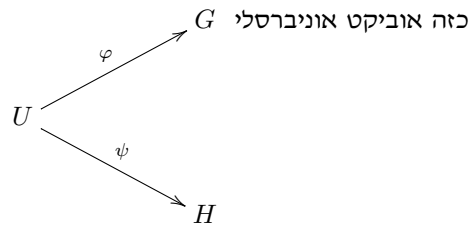
(תזכורת: $\exists!$ אומר "קיים ויחיד")

$$L(x) := (g(x), h(x))$$

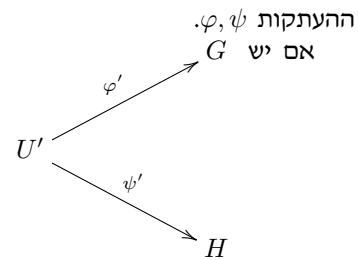
$$L(xy) = (g(xy), h(xy)) = (g(x)g(y), h(x)h(y)) = (g(x), h(x)) \cdot (g(y), h(y)) = L(x)L(y)$$

טענה

הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם, שמתחלף עם



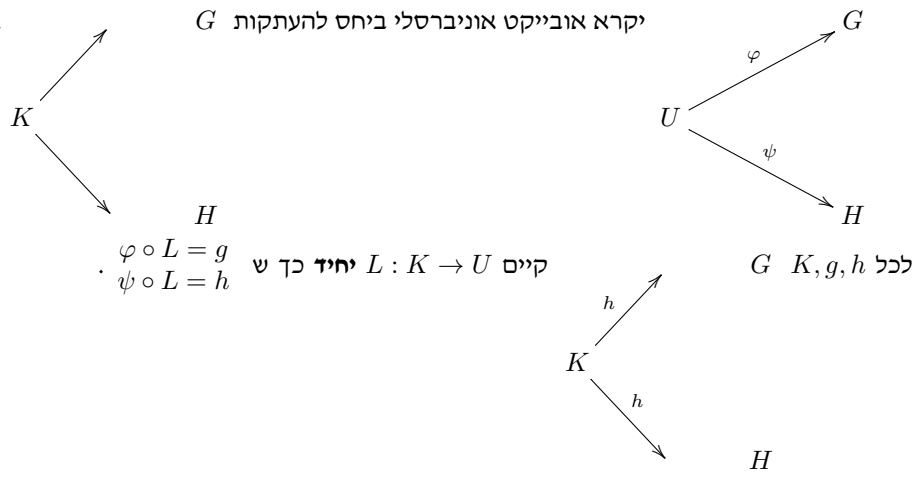
שמקיים את תכונת האוניברסליות, אז יש איזומורפיזם



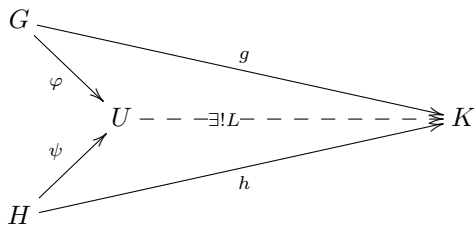
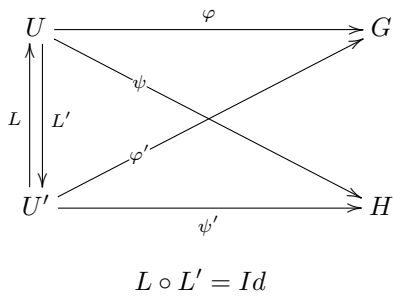
ההעתקות φ, ψ . אם יש G .

$$\begin{array}{l}
 \varphi' \circ F = \varphi \\
 \psi' \circ F = \psi
 \end{array}$$

כך ש $F : U \rightarrow U'$



הוכחה



האם יש ψ, φ, U כך שלכל K, g, h קיים L יחיד כך שהדיאגרמה מתחלפת?

הגדרה

אם A קבוצה אז מילה בא היא סדרה סופית (a_1, a_2, \dots, a_n) כך ש $a_c \in A$, $n \geq 0$ שלם כלשהו.

W_A יסמן את קבוצת כל המילים ב A .

עבור החבורות שלנו נניח בה"כ שהקבוצות H, G הן זרות (אם לא, נעשה $H \rightarrow H \times \{0\}$
 $G \rightarrow G \times \{1\}$).

W יסמן את קבוצת המילים ב $G \cup H$.

על W נגדיר יחס שקילות הנוצר ע"י השקילויות הבאות:

1. אם יש שתי אותיות ברצף שבאו מאותה חבורה, זה שקול למכפלתן: לדוגמה $(g_1, h_2, g_3, g_4, h_5, h_6, g_7) \sim (g_1, h_2, g_3g_4, h_5h_6, g_7)$

2. אם במילה מופיע איבר היחידה של אחת החבורות זה שקול לבלעדיו: לדוגמה

$$(h_1, g_2, h_3, 1_G, h_5, g_6) \sim (h_1, g_2, h_3, h_5, g_6)$$

קבוצת מחלקות השקילות תסומן $G * H$, ועליה נגדיר פעולה שהיא פעולת השרשור על מילים:

$$(g_1, h_2, g_3)(g_5, h_6, h_{10}) = (g_1, h_2, g_3, g_5, h_6, h_{10})$$

צ"ל

פעולה זו מוגדרת היטב על מחלקות השקילות, והיא חבורה.

הוכחה

זה מוגדר היטב כי אפשר לבצע את ההחלפות/הסרות/הוספות לפני השרשור או אחריו, ונקבל אותו דבר. זה חבורה כי:

• איבר היחידה הוא המילה הריקה \emptyset .

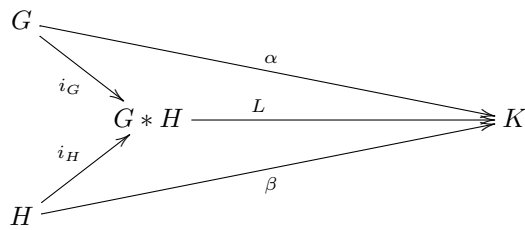
• ההפכי של כל מילה הוא האיברים ההפכיים שלה בסדר הפוך:

$$(g_1, h_2)(h_2^{-1}, g_1^{-1}) = (g_1, h_2, h_2^{-1}, g_1^{-1}) = (g_1, h_2h_2^{-1}, g_1^{-1}) = (g_1, 1_H, g_1^{-1}) = \\ = (g_1, g_1^{-1}) = (g_1g_1^{-1}) = (1_G) = \emptyset$$

הגדרה

$G * H$ נקראת המכפלה החופשי של H ו G
 $(G \times H)$ נקראת המכפלה הישרה של G ו H

עכשיו ניתן לכתוב



$$L([(g_1, h_2, h_3, g_4)]) := \alpha(g_1) \cdot \beta(h_2) \cdot \beta(h_3) \cdot \alpha(g_4)$$

זה הומומורפיזם של חבורות כי הוא שומר על פעולת השרשור:

$$L([(g_1, h_2 h_3, g_4)]) = \alpha(g_1) \cdot \beta(h_2 h_3) \cdot \alpha(g_4)$$