...

משפט

עבור S^1 נקבל שF היא העתקה חח"ע ועל מ$\pi_1\left(S^1,1\right)$ ל$\mathbb{Z}$.
אזי F היא איזומורפיזם של חבורות עבור פעולת החיבור ב$\mathbb{Z}$. כלומר

$$F\left(\left[\varphi\right]\left[\psi\right]\right)=F\left(\left[\varphi\right]\right)+F\left(\left[\psi\right]\right)$$

הוכחה

נסמן $\begin{array}{c}F\left(\left[\varphi\right]\right)=n\\ F\left(\left[\left[\psi\right]\right]\right)=m\end{array}$. צ"ל $\widehat{\varphi\cdot\psi}^{0}\left(1\right)=n+m$.

כשמשרשרים את φ וψ, שתי המסילות מתחילות ומסתיימות באותה נקודה, אז אין בעיה. אבל כשמשרשרים הרמות, אז ההרמה השנייה מתחילה בנקודת הסיום של ההרמה הראשונה - $\widehat{\varphi\cdot\psi}^{e}=\widehat{\varphi}^{e}\cdot\widehat{\psi}^{\widehat{\varphi}^{e}(1)}$. במקרה שלנו $n=\widehat{\varphi}^{0}\left(1\right)$, ולכן:

$$\widehat{\varphi\cdot\psi}^{0}=\widehat{\varphi}^{0}\cdot\widehat{\psi}^{n}\left(1\right)$$

כלומר צריך לברר מהו $\widehat{\psi}^{n}\left(1\right)$. אם ידוע לנו ש$m=\widehat{\psi}^{0}\left(1\right)$, נסמן ב$T_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ את ההעתקה $T_n\left(t\right)=t+n$. מתקיים

$$p\circ T_n=p$$

טענה: $T_n\circ\widehat{\psi}^{0}=\widehat{\psi}^{n}$. כלומר אם לוקחים את ההרמה שמתחילה ב0, ומזיזים אותה בn, מקבלים את ההרמה שמתחילה בn.

הוכחה: צריך לברר ש$T_n\circ\widehat{\psi}^{0}$ הוא הרמה של ψ המתחילה בn.

1. זוהי אכן הרמה של ψ כי $p\circ T_n\circ\widehat{\psi}^{0}=p\circ\widehat{\psi}^{0}=p\circ\widehat{\psi}^{0}=\psi$.
2. $T_n\circ\widehat{\psi}^{0}\left(0\right)=T_n\left(0\right)=n$, ולכן $\widehat{\psi}^{n}\left(1\right)=T_n\circ\widehat{\psi}^{0}\left(1\right)=T_n\left(m\right)=n+m$.

תרגיל

יהי $X=U\cup V$, כך ש:

- $U\cap V$ לא ריק וקשיר מסילתית
- U,V פשוטי קשר

אזי X פשוט קשר.

דוגמה

נבחר לדוגמה $n \geq 2$, $\begin{matrix} U = \left\{ (x_1, \ldots x_{n+1}) \middle| S^n \middle| x_{n+1} > -\frac{1}{5} \right\} \\ V = \left\{ (x_1, \ldots x_{n+1}) \in S^n \middle| x_{n+1} < \frac{1}{5} \right\} \end{matrix}$. הם כוויצים כי הומאומורפים לדיסק פתוח, והחיתוך הומאומורפי ל$\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \times S^{n-1}$.

$\Longleftarrow$ S^n עבור $n \geq 2$ פשוט קשר.

עבור $n = 1$ זה עובד - S^1 הוא לא פשוט קשר, כי $U \cap V$ לא קשיר מסילתית.

משפט

עבור $n \neq 2$, $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^2$.

הוכחה

עבור $n = 1$ הופיעה הוכחה בסמסטר קודם.

עבור $n > 2$, נניח בשלילה שקיים הומאומורפיזם $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$. אזי : $h|_{\mathbb{R}^2 - \{0\}}$ $\mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$ הוא הומאומורפיזם. כלומר:

פשוט קשר$\leftarrow S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n - \{h(0)\} \cong \mathbb{R}^2 - \{0\} \simeq S^1 \rightarrow$לא פשוט קשר(כי $\pi_1(S^n) = \mathbb{Z}$).

משפט

∂D^2 איננו נסג של D^2.

הוכחה

נניח בשלילה שקיים $r : D^2 \to \partial D^2$ כך ש$r \circ i = Id_{\partial D^2}$. כלומר $\pi_1(\partial D^2, a) \underset{r_*}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} \pi_1(D^2, a)$.

נבחר נקודת בסיס $a \in \partial D^2$, ואותה נקודת בסיס בD^2. אזי

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (Id_{\partial D^2})_* = Id_{\pi_1(\partial D^2, a)}$$

מכאן בפרט שi_* חח"ע.

הערה

אותה הוכחה תראה בכל מקרה של נסג $A \subseteq X$ ע"י בחירת נקודת בסיס $a \in A$ ואותה נקודת בסיס $a \in X$ ש$r_* \circ i_* = Id_{\pi(A,a)}$, ובפרט i_* חח"ע.

משפט(משפט נקודת השבת של בראור)

אם $f : D^2 \to D^2$ רציפה, אז יש $a \in D^2$ כך ש$f(a) = a$.

הוכחה

נניח בשלילה שיש $f : D^2 \to D^2$ כך ש$f(x) \neq x$ לכל $x \in D^2$, ונבנה $r : D^2 \to \partial D^2$ באופן הבא:

בהינתן x, נצייר קרן שיוצאת מ$f(x)$ ועוברת בx, והחיתוך עם השפה יהיה $r(x)$. זה אפשרי שכן $f(x) \neq x$.

עבור נקודות על השפה $x \in \partial D^2$, הקרן שיוצאת מ$f(x)$ תעבור דרך x ולכן המפגש עם השפה יהיה x.

קיבלנו נסיגה מD^2 ל∂D^2 - וזו סתירה.

משפט(המשפט היסודי של האלגברה)

יהי $p(z)$ פולינום מרוכב ממעלה חיובית. אזי קיים $a \in \mathbb{C}$ כך ש$p(0) = 0$.

הוכחה

בה"כ $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ו$(n > 0)$, ונניח בשלילה ש$p(z) \neq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

אזי ע"י צמצום הטווח ניתן לחשוב על p כהעתקה $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$.

נסמן S_r את המעגל ברדיוס r סביב הראשית. ע"י צמצום התחום לS_n נקבל העתקה

$$p_r : S_r \to \mathbb{C} - \{0\}$$

לכל r ההעתקה p_r היא נול הומוטופית, כי p היא הרחבה של p_r לדיסק ברדיוס r וS_r היא השפה שלו.

נסמן $q_r : S_r \to \mathbb{C} - \{0\}$ את ההעתקה $q_r(z) = z^n$. נראה שעבור r מספיק גדול, $p_r \sim q_r$.

קיים r מספיק גדול כך שאם $|z| = r$ אז

$$q_r(z) \to |z^n| > \left|a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \leftarrow p_r(z) - q_r(z)$$

לכן לכל $z \in S_r$ הקטע המחבר את $q_r(z)$ ל$p_r(z)$ איננו עובר בראשית.

לכן ניתן לרשום את ההומוטופיה $H : S_r \times I \to \mathbb{C} - \{0\}$

$$H(z,t) = (1-t)\, p_r(z) + t\,(q_r(z))$$

שהיא הומוטופיה מp_r לq_r:

$$p_{r*} : \pi_1(S_r, r) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, p_r(r))$$

$$q_{r*} : \pi_1(S_r, r) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, q_r(r))$$

כיוון ש$p_r \sim q_r$ קיים איזומורפיזם $F_\gamma : \pi_1(C - \{0\}, p_r(r)) \to \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, q_r(r))$ כך ש$F_\gamma \circ p_{r*} = q_{r*}$.

p_r נול הומוטופית לכן $p_{r*} = 0$ ולכן גם $F_\gamma \circ p_{r*} = 0$.

אם q_{r_0} מעתיקה את היוצר של $\pi_1(S_r, r)$ לn פעמים כיוצר של $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, r^n)$.

פרק בתורת החבורות

נתונות שתי חבורות G,H. אנו מתעניינים בהומומורפיזמים לתוך G,H:

$$\begin{tikzcd}
 & & G \\
K \arrow[r, dashed, "\nexists! L"] \arrow[urr, bend left, "g"] \arrow[drr, bend right, "h"'] & G\times H \arrow[ur, "p_G"] \arrow[dr, "P_H"] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

(**תזכורת:** $\exists!$ אומר "קיים ויחיד")

$$L\left(x\right):=\left(g\left(x\right),h\left(x\right)\right)$$

$$L\left(xy\right)=\left(g\left(xy\right),h\left(xy\right)\right)=\left(g\left(x\right)g\left(y\right),h\left(x\right)h\left(y\right)\right)=\left(g\left(x\right),h\left(x\right)\right)\cdot\left(g\left(y\right),h\left(y\right)\right)=L\left(x\right)L\left(y\right)$$

טענה

כזה אובייקט אוניברסלי

$$\begin{tikzcd}
 & G \\
U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\
 & H
\end{tikzcd}$$

הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם, שמתחלף עם ההעתקות φ,ψ.

אם יש

$$\begin{tikzcd}
 & G \\
U' \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\
 & H
\end{tikzcd}$$

שמקיים את תכונת האוניברסליות, אז יש איזומורפיזם $F:U\to U'$ כך ש $\begin{matrix}\varphi'\circ F=\varphi\\ \psi'\circ F=\psi\end{matrix}$.

$$\begin{tikzcd} & G \\ U \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

יקרא אובייקט אוניברסלי ביחס להעתקות G

$$\begin{tikzcd} & {} \\ K \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & H \end{tikzcd}$$

.

לכל K, g, h G קיים $L : K \to U$ **יחיד** כך ש $\begin{matrix} \varphi \circ L = g \\ \psi \circ L = h \end{matrix}$.

$$\begin{tikzcd} & {} \\ K \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & \\ & H \end{tikzcd}$$

הוכחה

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[drr, "\psi" near start] \arrow[d, shift left, "L'"] & & G \\ U' \arrow[u, shift left, "L"] \arrow[urr, "\varphi'" near start] \arrow[rr, "\psi'"'] & & H \end{tikzcd}$$

$$L \circ L' = Id$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[drr, "g"] & & \\ & U \arrow[r, dashed, "\exists! L"] & K \\ H \arrow[ur, "\psi"] \arrow[urr, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

האם יש $U, \varphi\psi$ כך שלכל K, g, h קיים L יחיד כך שהדיאגרמה מתחלפת?

הגדרה

אם A קבוצה אז מילה בA היא סדרה סופית $(a_1, a_2, \dots a_n)$ כך ש$a_c \in A$, $n \geq 0$ שלם כלשהו.

W_A יסמן את קבוצת כל המילים בA.

עבור החבורות שלנו נניח בה"כ שהקבוצות H, G הן זרות(אם לא, נעשה $\begin{matrix} H \to H \times \{0\} \\ G \to G \times \{1\} \end{matrix}$).

W יסמן את קבוצת המילים ב$G \cup H$.

על W נגדיר יחס שקילות הנוצר ע"י השקילויות הבאות:

1. אם יש שתי אותיות ברצף שבאו מאותה חבורה, זה שקול למכפלתן: לדוגמה $(g_!, h_2, g_3, g_4, h_5, h_6, g_7) \sim (g_1, h_2, g_3g_4, h_5h_6, g_7)$
2. אם במילה מופיע איבר היחידה של אחת החבורות זה שקול לבלעדיו: לדוגמה $(h_1, g_2, h_3, 1_G, h_5, g_6) \sim (h_1, g_2, h_3, h_5, g_6)$

קבוצת מחלקות השקילות תסומן $G * H$, ועליה נגדיר פעולה שהיא פעולת השרשור על מילים:

$$(g_1, h_2, g_3)\,(g_5, h_6, h_{10}) = (g_1, h_2, g_3, g_5, h_6, h_{10})$$

צ"ל

פעולה זו מוגדרת היטב על מחלקות השקילות, והיא חבורה.

הוכחה

זה מוגדר היטב כי אפשר לבצע את ההחלפות/הסרות/הוספות לפני השרשור או אחריו, ונקבל אותו דבר.

זה חבורה כי:

- איבר היחידה הוא המילה הריקה $\emptyset$.
- ההפכי של כל מילה הוא האיברים ההפכיים שלה בסדר הפוך:

$$(g_1, h_2)\left(h_2^{-1}, g_1^{-1}\right) = \left(g_1, h_2, h_2^{-1}, g_1^{-1}\right) = \left(g_1, h_2h_2^{-1}, g_1^{-1}\right) = \left(g_1, 1_H, g_1^{-1}\right) =$$

$$= \left(g_1, g_1^{-1}\right) = \left(g_1g_1^{-1}\right) = (1_G) = \emptyset$$

הגדרה

$G * H$ נקראת המכפלה החופשי של G וH

($G \times H$ נקראת המכפלה הישרה של G וH)

עכשיו ניתן לכתוב

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "i_G"'] \arrow[drr, "\alpha"] & & \\
& G * H \arrow[r, "L"] & K \\
H \arrow[ur, "i_H"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$L\left(\left[\left(g_1, h_2, h_3, g_4\right)\right]\right) := \alpha\left(g_1\right) \cdot \beta\left(h_2\right) \cdot \beta\left(h_3\right) \cdot \alpha\left(g_4\right)$$

זה הומומורפיזם של חבורות כי הוא שומר על פעולת השרשור:

$$L\left(\left[\left(g_1, h_2 h_3, g_4\right)\right]\right) = \alpha\left(g_1\right) \cdot \beta\left(h_2 h_3\right) \cdot \alpha\left(g_4\right)$$