פתרון תרגיל 7

שאלה 1

$$6 = 6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1$$
$$= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1$$

לכן יש 11 מחלקות צמידות, נציגים שלהן הם:

$$id, (12), (12)(34), (12)(34)(56), (123), (123)(45),$$
$$(123)(456), (1234), (1234)(56), (12345), (123456)$$

שאלה 2

א. אפשר להוכיח ישירות לפי הגדרה (לבדוק שהצמדה בכל איבר מ- A_4 נשארת ב- V), לחלופין אפשר לציין כי V היא איחוד זר של מחלקות הצמידות $[id]$ ו- $[(12)(34)]$ ולכן נורמלית.

ב. $\left|A_4/V\right| = \frac{|A_4|}{|V|} = \frac{12}{4} = 3$ וכל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית.

שאלה 3

א. ראשית – נשים לב ש- n>3. נבחר ראשית שני מספרים a,b מתוך n המספרים וניצור מהם חילוף. יש $\binom{n}{2}(2-1)! = \binom{n}{2}$ אפשרויות לעשות כך. לאחר מכן נבחר עוד שני מספרים c,d מתוך n-2 המספרים שנותרו וניצור מהם חילוף – ויש $\binom{n-2}{2}$ אפשרויות לעשות כך.

אבל (a b)(c d) = (c d)(a b) ולכן מספר התמורות מהצורה המבוקשת הינו $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

ב. כמה איברים מקיימים את המשוואה $x^3 = \mathrm{Id}$ ב- S_{10} ?

נסתכל על כל תמורה בהצגתה כמכפלת מחזורים זרים-

זה מתקיים כאשר $x = Id$ (ויש תמורה אחת כזו!)

או כאשר *x מחזור באורך 3*-ויש $\binom{10}{3}2$ תמורות כאלו:

$\binom{10}{3}$ אפשרויות לבחירת שלשת מספרים כזו

$\binom{10}{3}2$ אפשרויות לסדר שלשות אלו בסדר מחזורי שונה:

נימוק:שש האפשרויות לסידורי שלושה מספרים מצטמצמות לשתי אפשרויות בגלל שחשוב רק הסדר המחזורי ביניהם:

$$(mnk) = (nkm) = (kmn)$$
$$(nmk) = (mkn) = (knm) .$$

או כאשר x מבוטא כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 3-

ולזה יש $\frac{1}{2!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

הסבר

$\binom{10}{3}$ אפשרויות לשלשת המספרים הנבחרת למחזור הזר האחד

לאחר בחירתו נשאר לבחור שלשה מתוך 7 המספרים הנותרים

למחזור השני ולזה יש $\binom{7}{3}$ שלשות אפשריות.

יש להכפיל ב-2 כל-אחת מהמספרים הנ"ל כי לכל בחירת מחזור יש 2 אפשרויות לסדרו .(לפי ההסבר הקודם)

סה"כ-$\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2$ אפשרויות

יש לחלק מספר זה ב-*2!* בגלל שאין חשיבות לסדר בחירת התמורות(אין חשיבות לסדר כתיבתן)

סה"כ מספר תמורות שניתן לבטאן כמכפלת שני מחזורים זרים באורך 3

הוא- $\binom{10}{3}\binom{7}{3}2=\binom{10}{3}\binom{7}{3}2^2\frac{1}{2!}$

או כאשר x <u>מבוטא כמכפלת שלושה מחזורים זרים באורך 3</u>-

בדומה לשיקולים קודמים יש $\frac{1}{3!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3$ תמורות כאלו ב-S_{10}.

ולכן בסה"כ יש $1+2\binom{10}{3}+\binom{10}{3}\binom{7}{3}2+\frac{1}{3!}\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{3}2^3$ תמורות המקיימות $x^3=\mathrm{Id}$ ב-S_{10}.

<u>שאלה 4</u>

א. התמורות צמודות, תמורה המצמידה אותן היא $(13)(25)(46)(789)$.

ב. התמורות לא צמודות כי אין להן אותו מבנה מחזורים.

ג. ראשית נציג את β כמכפלה של מחזורים זרים: $\beta=(12)(234)(78)=(1234)(78)$ לכן אין לה אותו מבנה מחזורים כמו ל- α לכן הן לא צמודות.

ד. נציג את α כמכפלה של מחזורים זרים: $\alpha=(12)(23)(34)(789)=(1234)(789)$ לכן ל- α ו- β אותו מבנה מחזורים לכן הן צמודות. תמורה מצמידה היא $(174)(285)(396)$.

<u>שאלה 5</u>

א. נסמן Q_8 חבורת הקווטרניונים. $Z(Q_8)$ ת"ח של Q_8 לכן לפי לגרנז' סדרה מחלק את סדר Q_8 (שהוא 8), לכן $|Z(G)|\in\{1,2,4,8\}$. האפשרות 8 נפסלת כי החבורה לא קומוטטיבית. 4 נפסל כי אז היינו מקבלים ש- $Q_8/Z(Q_8)$ חבורה מסדר 2 לכן ציקלית (מה שהוכחנו שלא יכול להיות). האפשרות 1 נפסלת כי לחבורת- p יש מרכז לא טריוואלי. לכן במרכז יש שני איברים, ונשאר רק למצוא איבר נוסף (מלבד היחידה) שמתחלף עם שאר האיברים. לכן המרכז הוא $\{\pm1\}$.

ב. הפתרון זהה לחלוטין לסעיף א': גם D_4 היא חבורה לא אבלית מסדר 8, ולכן שוב נקבל כי המרכז חייב להיות מסדר 2. לכן נשאר למצוא איבר (מלבד id) שמתחלף עם שאר האיברים, איבר זה הוא σ^2 וכך נקבל כי המרכז הוא $\{id,\sigma^2\}$.

<u>שאלה 6</u>

א. אלו הן שתי חבורות ציקליות אינסופיות; ראינו כי כל חבורה ציקלית אינסופית איזומורפית ל- $\mathbb{Z}$, לכן $2\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}\cong3\mathbb{Z}$.

ב. הטענה לא נכונה. נביא דוגמא: נבחר $G=\mathbb{Z}$, $H=2\mathbb{Z}$, $K=3\mathbb{Z}$. לפי סעיף א' מתקיימים תנאי המשפט, אך G/H היא $\mathbb{Z}_2$ ו- G/K היא $\mathbb{Z}_3$ והן כמובן לא איזומורפיות (אין להן אותו מספר איברים..)

<u>שאלה 7</u>

זוהי קבוצת כל התמורות המעבירות את 1 ל- t כלשהו ($1\le t\le n$), את 2 ל- $t+1$ (מודולו n), את 3 ל- $t+2$ (מודולו n) וכך הלאה. הסבר: בביטוי $\gamma^{-1}(1,\dots,n)\gamma$ 1 צריך לעבור ל- 2 (כי תמורה זו שווה ל- $(1,\dots,n)$ לפי ההנחה). אם γ מעבירה את 1 ל- t, $(1,\dots,n)\gamma$ מעבירה את 1 ל- $t+1$, לכן γ^{-1} צריכה להעביר את $t+1$ ל-2, כלומר γ מעבירה את 2 ל- $t+1$ וכך הלאה. זו ת"ח ציקלית של S_n כי היא נוצרת ע"י המחזור $(1,\dots,n)$: חישוב מראה כי $(1,\dots,n)$ בחזקת t היא התמורה השולחת את r ל- $r+t$ (מודולו n).