מתמטיקה בדידה – תרגיל 9

1. הוכח או הפרך:

א. $|\{n^2 \mid n\in\mathbb{N}\}|=|\mathbb{N}|$.

ב. $|\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}_{11}\}|=|\mathbb{Z}_{11}|$.

ג. $|\{n^2 \mid n\in\mathbb{Z}\}|=|\mathbb{Z}|$.

ד. אם $|A|=|B|$ וגם $f:A\to B$ חח"ע אזי f על.

ה. אם $|A|=|B|=n\in\mathbb{N}$ וגם $f:A\to B$ חח"ע אזי f על.

ו. $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}\times\{0,1\}|$.

2.

א. תהי K קבוצת המספרים הממשיים שאינם רציונאליים. הוכח ש- K אינה בת מניה.

ב. מצא מהי עוצמת הקבוצה: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid (x-\pi)\in\mathbb{Q}\}$ (למשל, $\pi,\pi+0.189\in A$).

3. ניקח את המישור $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. נצייר עליו מספר עיגולים (עיגול הוא הפנים של מעגל, כלומר $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\middle|\; (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\right\}$ עבור איזושהי נקודה $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ואיזשהו רדיוס $r\in\mathbb{R}^+$). נניח כי ציירנו את העיגולים כך שאין חיתוך בין אף שני עיגולים.

א. הוכח כי עוצמת מספר העיגולים המצוירים היא לכל היותר $\aleph_0$.

ב. האם זה היה נכון גם לו במקום עיגולים היינו מציירים מעגלים?

4. בהינתן שתי קבוצות A ו B, ויחסי סדר מלאים R על A ו S על B, פונקציה $f:A\to B$ נקראת שומרת סדר אם לכל aRb, $f(a)Sf(b)$. אמור האם קיימת $f:A\to B$ הפיכה ושומרת סדר במקרים הבאים:

א. $A=\mathbb{N}$ ו $R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: a\le b\}$, $B=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ו $S=\{(a,b)\in\mathbb{N}\cup\{0\}\times\mathbb{N}\cup\{0\}: a\le b\}$.

ב. $A=\mathbb{N}$, $R=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: a\le b\}$, $B=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ ו $S=\{(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: a\le b\}\cup\{(a,\infty): a\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$.

בהצלחה!