אינפי 3, תרגול 11

15 בינואר 2014

אינטגרלים דו מימדיים (כפולים)

נעסוק רק בעניין הטכני ולא בהגדרות דרך סכומי רימן כפולים.

תכונות + חישוב טכני

1. לינאריות: אם $f(x,y), g(x,y)$ אינטגרביליות בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^2$, אז כל $a,b \in \mathbb{R}$, $af+bg$ אינטג' ומתקיים :

$$\iint_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]dxdy = a\iint_D f(x,y)dxdy + b\iint_D g(x,y)dxdy$$

2. $f \cdot g$ אינטג' ב־D(אך אינטגרל כפול לא משמר מכפלה!)

3. מונוטוניות האינטגרל: אם $f \le g$ בכל נק' של D אז גם:

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy$$

4. הערכת האינגטרל: אם $f(x,y)$ אינטגרבילית ב־D ו־D בעלת שטח S וגם

$$\begin{aligned} m &= \inf_D f(x,y) \\ M &= \sup_D f(x,y) \end{aligned}$$

אז:

$$m \cdot S \le \iint_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S$$

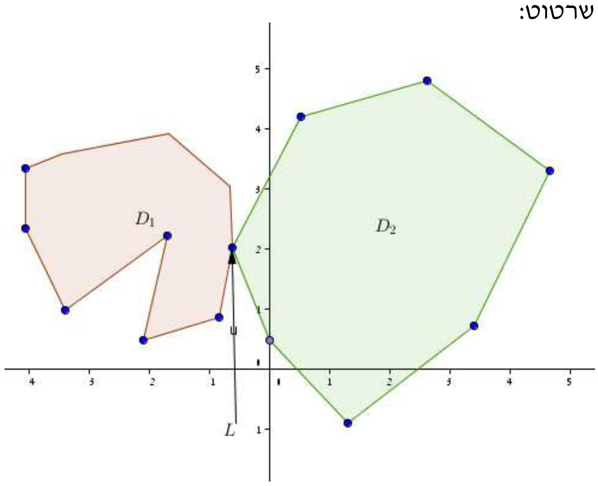
משפט הערך הממוצע: אם בנוסף התחום D קשיר (כל שתי נקודות ניתן לחבר ע"י עקומה [מסילה] שנמצאת בD) וf רציפה ב־D, אז קיימת נקודה $(x_0,y_0) \in D$ כך ש:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S(D)$$

5. אם הפונקציה $f(x,y)$ אינטגרבילית ב־D והתחום D מחולק ע"י עקום L בעל שטח אפס (חד מימדי או אפס מימדי) והחלוקה משרה שני תחומים קשירים D_1, D_2 אז f אינטגרבילית ב־D_1 וב־D_2 ומתקיים

$$\iint_D f dxdy = \iint_{D_!} f dxdy + \iint_{D_2} f dxdy$$

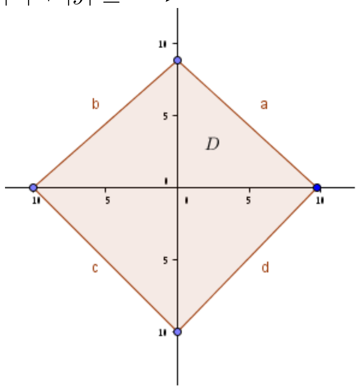
שרטוט:



דוגמה 1: נסמן

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{100+\sin^3(3x)+\cos^{10}(5y)}$$

כאשר D הוא הריבוע $|x|+|y| \le 10$. הוכיחו כי $1.96 \le I \le 2$.



תשובה:

$$S(D) = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200$$

(מחצית מכפלת האלכסונים). נמצא את ה$\max_D f, \min_D f$:

$$\begin{aligned}\min_D sin^2(3x) &= 0\\ \min_D cos^{10}(5y) &= 0\end{aligned}$$

המכנה המינימאלי ב־D הוא $100 = 0 + 0 + 100 \Leftarrow$ $\max_D f = \frac{1}{100}$.

כמו כן $\sin^2(3x), \cos^{10}(5y) \leq 1 \Rightarrow \min_D f = \frac{1}{102}$. ברור כי f אינטגרבילית ב־D כי היא רציפה שם (מנה של רציפות כאשר המכנה $\neq 0$). לכן לפי הערכת האינטגרל:

$$1.96 = \frac{1}{102} \cdot 200 \leq I \leq \frac{1}{100} \cdot 200 = 2$$

ומשל.

משפט (חישוב אינטגרל במלבן): אם $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $D = [a,b] \times [c,d]$, ונניח כי f אינטגרבילית ב־D (למשל f רציפה שם או יותר מזה עד כדי משפט לבג ז"א עד כדי קבוצה ממידה 0 של נקודות) ונניח גם שלכל $x \in [a,b]$ קיים $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. אז גם קיים האינטגרל:

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

ומתקיים:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx$$

ואפשר גם להחליף סדר אינטגרציה באינטגרלים החוזרים הנ"ל, להגדיר $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ ולקחת $I = \int_c^d I(y)dy$.

הערה: מידת 0 ־ לכל $\epsilon > 0$ שטח הקבוצה קטן מϵ. לדוג' ב$\mathbb{R}^2$ מדובר בתחומים בעלי שטח 0 כמו קווים.

דוגמה: לחשב את $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x+y}}$ במלבן $D : \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}$.

תשובה: גם כאן f רציפה במלבן D, ולכן אינטגרבילית ב־D ובנוסף $f(x,\cdot)$,$f(\cdot,y)$ רציפות ב־D, ולכן גם קיימים האינטגרלים החד מימדיים החוזרים הנ"ל ומתקיים:

$$I = \int_1^4 dx \underbrace{\left(\int_0^4 \frac{dy}{\sqrt{x+y}}\right)}_{2\sqrt{x+y}|_{y=0}^{y=4} = 2(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})} = 2\int_1^4 \left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x}\right)dx = 2 \cdot \frac{2}{3}\left[(x+4)^{3/2} - x^{3/2}\right] = \frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - 7)$$

אינטגרלים החסומים בתחום כללי

משפט: תהי $f(x,y)$ מוגדרת בתחום D , בעל התכונות הבאות:

1. D קומפקטי (חסום וסגור)
2. כל קו ישר המקביל לציר ה־y חותך את שפת התחום בלא יותר משתי נקודות ואת השפה הנ"ל ניתן לפרק לאיחוד של שני קווים זרים $y_1(x), y_2(x)$.
3. התחום חסום בין הישרים

$$\begin{aligned} x &= a = \min\{x \mid (x,y) \in D\} \\ x &= b = \max\{x \mid (x,y) \in D\} \end{aligned}$$

אזי , אם f אינטגרבילית ב־D, מתקיים:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

הערה: כאן לא ניתן "סתם" להחליף את הסדר!
D מכונה תחום נורמלי ביחס לציר ה־x ובאפן דומה ביחס לציר הy:

$$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$$

ואז:

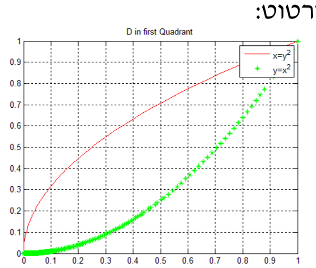
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

דוגמה:

1. לחשב את $\iint_D ydxdy$ כאשר D חסום ע"י העקומים $y = x^2, x = y^2$.
2. לחשב את $\iint_D ydxdy$ כאשר D חסום ע"י $x = 0, y = 0, y = 2\pi, x = 2 + \sin y$.

תשובות:

1. שרטוט:



זהו תחום נורמלי ביחס לציר ה־x:

$$D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

$f(x,y)=y$ רציפה ולכן:

$$\iint_D ydxdy = \int_0^1 dx \underbrace{\left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} ydy\right)}_{\frac{y^2}{2}|_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2}=\frac{x-x^4}{2}} = \int_0^1 \frac{x-x^4}{2}dx = \frac{3}{20}$$

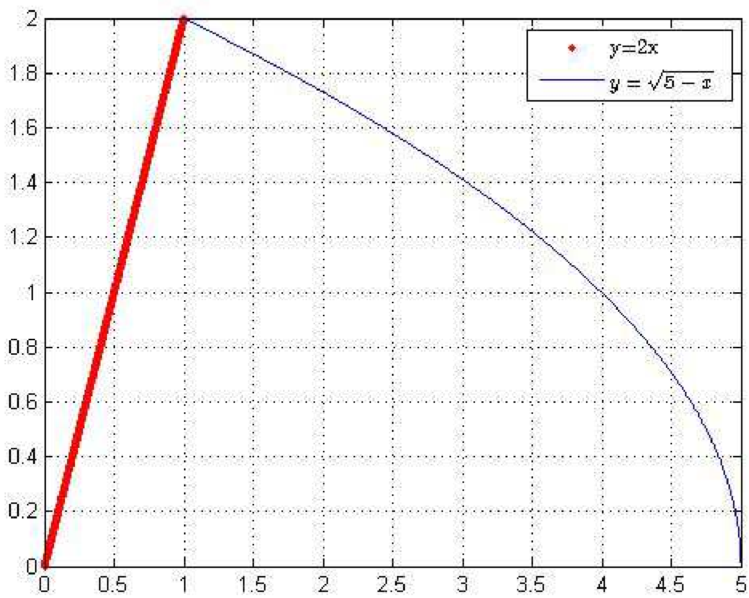
2. זהו תחום נורמלי ביחס לציר ה-y:

$$\begin{aligned} D &= \{(X,y) \mid 0 \le y \le 2\pi, 0 \le x \le 2+\sin y\} \Rightarrow k = \iint ydxdy \\ &= \int_0^{2\pi} ydy \int_0^{2+\sin y} dx = \int_0^{2\pi} y(2+\sin y)dy = 2\pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

החלפת סדר האינטגרציה - דוגמה בהנחה ש-f רציפה ב-$\mathbb{R}^2$, להחליף סדר אינטגרציה באינטגרל:

$$\int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x,y)dy + \int_1^5 dx \int_0^{\sqrt{5-x}} f(x,y)dy$$

פתרון: ונצייר:



$y = \sqrt{5-x} \Rightarrow \quad y^2 = 5 - x$
$x = 5 - y^2$
הוא
והתחום הוא $D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq y \leq 2 \\ \frac{y}{2} \leq x \leq 5 - y^2 \end{array} \right\}$ והאינטגרל

$$\boxed{\int_0^2 dy \int_{y/2}^{5-y^2} f(x,y)dx}$$