מבוא לתורת החבורות תרגיל 11

1. מה סדר ת"ח 2-סילו של חבורה מסדר 80?
פתרון:
$80 = 2^4 \cdot 5$ לכן חבורת 2 - סילו היא מסדר 16.

2. הדגם את משפט קיילי על $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
פתרון:
נמספר את איברי החבורה:

$$(0,0) = 1$$

$$(0,1) = 2$$

$$(1,0) = 3$$

$$(1,1) = 4$$

(0.0) מתאים כמובן לתמורת הזהות.
עבור $(0,1)$: $(0,1) + (0,0) = (0,1)$
$(0,1) + (0,1) = (0,1)$
$(0,1) + (1,0) = (1,1)$
$(0,1) + (1,1) = (1,0)$.
לכן $(0,1) \to (1,2)(3,4)$.
באופן דומה: $(1,0) \to (1,3)(2,4)$
ו $(1,1) \to (1,4)(2,3)$.

3. תהי G חבורה סופית ויהי $g \in G$ איבר מסדר k. הוכיחו שהתמורה שg יוצר לפי משפט קיילי שווה למכפלה של מחזורים מאורך k.
פתרון:

לכל $x \in G$ מתקיים $g(g(...(g(x))) = g^k x = e \cdot x = x$. לכן התמורה שמתאימה ל$g$ מחזירה כל איבר לעצמו אחרי לכל היותר k פעמים. (כלומר, היא מסדר שמחלק את k). בנוסף, אם בתמורה שמתאימה לg יש מחזור מאורך $t < k$, אז יש איבר $x \in G$ שחוזר לעצמו אחרי t פעמים, כלומר, $g^t x = x$ גורר ש$g^t = e$ בסתירה לכך ש$t < k$. לכן התמורה שמתאימה לg היא מכפלה של חזורים מאורך k בדיוק.

4. תהי G חבורה פשוטה מסדר n כאשר $n > 2$. הוכיחו כי קיים שיכון $G \hookrightarrow A_n$.
פתרון:

לפי משפט קיילי קיים שיכון $\varphi : G \to S_n$. לפי מה שהראינו בכיתה, $\varphi^{-1}(A_n)$ היא תת חבורה של G מאינדקס 2 או 1. אם היא תהיה מאינדקס 2 היא נורמלית, ולא טריוויאלית כי $n > 2$. אבל נתון שG פשוטה, לכן $G = \varphi^{-1}(A_n)$. כלומר, השיכון φ הוא למעשה לתוך A_n .

5. נתבונן בחבורת הסימטריה S_p עבור p מספר ראשוני.

(א) כמה איברים מסדר p יש בחבורה?
פתרון:

מכיוון שp ראשוני, איבר מסדר p יכול לביות רק מחזור מאורך p. מספר המחזורים מאורך p שווה למספר הדרכים לסדר p אנשים במעגל, שזה $(p-1)!$.

(ב) חשבו בעזרת סעיף א' את מספר התת־חבורות מסדר p בS_p.
פתרון:

בכל תת חבורה מסדר p יש $p-1$ איברים שונים מסדר p, לכן יש $\dfrac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$ תת חבורות מסדר p.

(ג) היעזרו בסעיף הקודם כדי להוכיח כי לכל מספר ראשוני p מתקיים

$$(p-1)! \equiv (-1) \mod p$$

זהו משפט וילסון.
פתרון:

תת החבורות מסדר p הן בעצם תת החבורות p־ סילו, כי p^1 זאת החזקה הכי גבוהה שמחלקת את $p!$. ממשפט סילו 3 $n_p \equiv 1 \mod p$, לכן

$(p-2)! \equiv 1 \mod p$. נכפיל ב$p-1$ ונקבל

$$(p-1)! \equiv (p-1) \mod p \equiv -1 \mod p$$

6. תהי G חבורה מסדר 55 שיש בה יותר מ4 איברים מסדר 5. הוכיחו כי G אינה אבלית.

(א) פתרון:
חבורת 5־סילו של G היא מגודל 5. כל האיברים מסדר 5מוכלים בחבורת 5־סילו.
אם הייתה רק חבורת 5־סילו אחת אז היו רק $5-1=4$ איברים מסדר 5 אבל נתון שיש יותר ולכן בהכרח יש יותר מחבורת 5־סילו אחת ולכן היא לא נורמלית.
אך בחבורה אבלית כל הת"ח הן נורמליות־ ולכן נובע שG לא אבלית.

7. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו־n_3 מספר התת־חבורות 2־סילו ו 3־סילו בהתאמה.

(א) מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).
פתרון:
$n_2 \equiv 1 \mod 2$ וכן $n_2|3$. לכן $n_2 = 1 \vee 3$.
דוגמא ל1: $\mathbb{Z}_{12}$ היא אבלית, ולכן כל תת חבורה היא נורמלית, בפרט תת חבורת 2 ־ סילו.
דוגמא ל3: D_6 . יש 3 תת חבורות מסדר 4: $\langle \tau, \sigma^3 \rangle, \langle \sigma^3, \sigma\tau \rangle, \langle \sigma^3, \sigma^2\tau \rangle$

(ב) מהם ערכי n_3 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).
פתרון:
$n_3 \equiv 1 \mod 3$ וכן $n_3|4$. לכן $n_3 = 1 \vee 4$.
דוגמא ל1: $\mathbb{Z}_{12}$ היא אבלית, ולכן כל תת חבורה היא נורמלית, בפרט תת חבורת 3 ־ סילו.
דוגמא ל4: A_4. יש 4 תת חבורות מסדר 3: $\langle (1.2.3) \rangle, \langle (1,3,4) \rangle, \langle (1,2,4) \rangle, \langle (2,3,4) \rangle$.

(ג) האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?
פתרון:
לא. אם $n_3 = 4$ אז יש 4 תת חבורות 3 ־ סילו, שבכל אחת מהן יש 2 איברים שונים מסדר 3. סה"כ יש 8 איברים מסדר 3. זה משאיר לנו 4 איברים־ מספיק רק לתת חבורה אחת מסדר 4, כלומר, רק לחבורת 2 ־ סילו אחת.

.8

(א) הוכיחו שכל חבורה מסדר 50 היא לא פשוטה.

פתרון:

$50 = 5^2 \cdot 2$. כלומר, זוהי חבורה מהצורה p^2q , והוכחנו שכל חבורה כזו היא לא פשוטה.

(ב) הוכיחו שכל חבורה מסדר 42 היא לא פשוטה.

פתרון:

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. נחשב את n_7 . ובכן, $n_7|6$ וכן, $n_7 \equiv 1 \mod 7$. לכן $n_7 = 1$. כלומר, חבורת 7־ סילו היא נורמלית.

.9 הוכיחו שכל חבורה מסדר 56 אינה פשוטה.

פתרון:

נניח בשלילה שG פשוטה. $56 = 7\cdot 8$. $n_7|8$ וכן $n_7 \equiv 1 \mod 7$ לכן האפשרויות לn_7 הן 1 או 8. מכיוון שהנחנו שG פשוטה, $n_7 = 8$. בכל חבורה מסדר 7 יש 6 איברים שונים מסדר 7. לכן בסה"כ יש 48 איברים מסדר 7. זה משאיר איתנו עם 8 איברים, שמהם אפשר להרכיב רק תת חבורה אחת מסדר 8, כלומר, תת חבורת 2 ־ סילו אחת. זה אומר שתת חבורת 2 ־ סילו היא נורמלית, בסתירה לכך שG פשוטה.