מבוא לתורת החבורות תרגיל 7 תשע"ח.

1. בחבורה D_4 חשבו:

$$(\sigma^3)(\tau\sigma^2)^3(\sigma^{-2})$$

פתרון:

$$(\sigma^3)(\tau\sigma^2)^3(\sigma^{-3}) = (\sigma^3)(\tau\sigma^2)(\sigma) = \sigma^3\sigma^{-2}\tau\sigma = \sigma\tau\sigma = \sigma\sigma^{-1}\tau = e$$

2. מצאו את כל הסדרים האפשריים של איברים בD_n.
פתרון:

ראשית, σ מסדר n וτ מסדר 2. כמו כן ראינו שכל האיברים מהצורה $\sigma^i\tau$ הם מסדר 2. לכן נשאר לבדוק איברים מהצורה σ^k. אנחנו יודעים ש$o(\sigma^k) = \frac{n}{(k,n)} = \frac{o(\sigma)}{(k,o(\sigma))}$. לכן הסדרים האפשריים לחזקות של σ הם כל המספרים שמחלקים את n. קיבלנו שהסדרים בD_n הם 2, וכן המספרים שמחלקים את n.

3. הוכיחו/הפריכו:

(א) $D_3 \cong S_3$

(ב) $D_6 \cong A_4$

i. צריך לשלוח את τ לאיבר מסדר 2, ואת σ לאיבר מסדר 3. נבחר:

$$\tau \to (1,2)$$

$$\sigma \to (1,2,3)$$

בD_3 יש יחס שמתקיים, וצריך לבדוק שהוא מתקיים גם בתמונה. אכן, $(1,2,3)^{-1} = (1,3,2)$ ו $(1,2,3)(1,2) = (1,2)(1,3,2)$.
זה יגדיר לנו כבר לאן לשלוח כל איבר, למשל $\sigma\tau \to (1,2,3)(1,2) = (1,3)$
לפי הבניה זהו אכן הומומורפיזם, קל לראות שהוא חח"ע ועל.

ii. כידוע בD_6 יש איבר מסדר 6, ואילו בS_4 אין איברים מסדר 6 (ולכן גם אין בA_4). לכן $D_6 \ncong A_4$.

4. יהי $n \geq 3$ טבעי. הוכיחו:

(א) אם n זוגי אז $Z(D_n) = \langle \sigma^{\frac{n}{2}} \rangle$

(ב) אם n אי זוגי $Z(D_n) = \{e\}$

i. ראשית נשים לב ש$\langle \sigma^{\frac{n}{2}} \rangle = \{\sigma^{\frac{n}{2}}, e\}$. e תמיד במרכז, והוכחנו בכיתה ש $\sigma^{\frac{n}{2}}$ במרכז. לכן נשאר להוכיח שאין שום איבר אחר במרכז. יהי איבר מהצורה σ^i עבור $i \neq \frac{n}{2}$. אזי $\tau\sigma^i = \sigma^{n-i}\tau \neq \sigma^i\tau$. כעת, יהי איבר מהצורה $\sigma^i\tau$עבור $0 \leq i \leq n-1$. $\sigma(\sigma^i\tau) = \sigma^{i+1}\tau \neq (\sigma^i\tau)\sigma = \sigma^i\sigma^{-1}\tau = \sigma^{i-1}\tau$. נשים לב ש$\sigma^{i+1}\tau = \sigma^{i-1}\tau$ אמ"ם $i+1 = i-1 \mod n$ וזה קורה אמ"ם $2 = 0 \mod n$, לא ייתכן עבור $n > 2$. לכן שאר האיברים אינם במרכז.

ii. בדיוק כמו בסעיף א', מוכיחים ששום איבר חוץ מהיחידה לא נמצא במרכז.

5. מצאו את כל תתי החבורות של D_4 . מי מהן נורמלית?
פתרון:

ראשית, נשים לב שהסדר של D_4 הוא 8, ולכן תתי החבורות הן מסדר 2 או 4. תת חבורה מסדר 2 היא בהכרח ציקלית, כלומר, זה שקול למצוא איבר מסדר 2. האיברים מסדר 2 בD_4 הם: $\sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau$. כל אחד מהם יוצר תת חבורה מסדר 2. בשביל חבורה מסדר 4 צריך או איבר מסדר 4, או שני איברים מסדר 2. האיברים מסדר 4 הם: σ, σ^3. אולם ניתן לראות ששניהם יוצרים את אותה תת חבורה. לכן יש לנו תת חבורה ציקלית אחת מסדר 4, $\langle\sigma\rangle$. בשביל לבנות תת חבורה לא ציקלית מסדר 4 צריך לבחור שני איברים מסדר 2 ולראות מה הם יוצרים. ייתכן שהם יצרו תת חבורה מסדר 4, וייתכן שהם יצרו את החבורה כולה. מבדיקה נגלה שהזוג τ, σ^2 יוצר תת חבורה אמיתי. לכן יש לנו

את: $\langle \tau, \sigma^2 \rangle$. וכן $\langle \sigma^2, \sigma^3\tau \rangle = \{\sigma^2, \sigma\tau.\sigma^3\tau, e\} = \langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle$. כלומר, יש לנו שתי תתי חבורות לא ציקליות מסדר 4. ניתן לבדוק ששאר הזוגות יוצרים את כל החבורה.

לסיכום: יש 5 תתי חבורות מסדר 2, תת חבורה ציקלית אחת מסדר 4, ושתי תת חבורות לא ציקליות מסדר 4.

מי מהן נורמלית?

כל תתי החבורות מסדר 4 נורמליות, כי האינדקס שלהן 2.

לגבי תתי חבורות מסדר 2: $\langle \sigma^2 \rangle$ נורמלית, כי היא המרכז.

ניתן לראות ששאר תתי החבורות מסדר 2 לא סגורות להצמדה.

6. בתרגיל הבא נתנות חבורות ותת חבורות נורמליות, ועליכם לחשב סדרים של איברים.

(א) $G = \mathbb{Z}$ ו $H = 20\mathbb{Z}$? מה הסדר של $3 + H$? $5 + H$? $2 + H$?

(ב) $G = \mathbb{Z}_{20}$, $H = \langle 5 \rangle$. חשבו את הסדרים של כל האיברים בG/H.

(ג) $G = U_{15}$, $H = \langle 4 \rangle$. חשבו את הסדרים של כל האיברים בG/H.

i. אנחנו מחפשים k כך ש$(3+H)^k = (3k+H) = H$ בפעם הראשונה. כלומר, k מינימלי כך ש$3k \in H$. מכיוון שH זה כל הכפולות של 20, המספר הקטן ביותר שאם נכפיל אותו ב3 נקבל כפולה של 20 הוא 20, ולכן $o(3+H) = 20$. באותו אופן מראים ש $o(5+H) = 4$ ו $o(2+H) = 10$.

ii. התת חבורה שנוצרת ע"י 5 היא מסדר 4, ולכן בחבורת מנה יש 5 איברים. ניתן לבדוק ש: $0, 1, 2, 3, 4$ אינם שקולים (כי ההפרשים בין כל שניים אינה כפולה של 5) ולכן הם יהיו הנציגים של הקוסטים בחבורת המנה. כמו בסעיף הקודם, הסדר של איבר $g + H$ זה המספר הקטן ביותר k כך ש $kg \in H$, כלומר כפולה של 5. לכן $o(0) = 1, o(1) = o(2) = o(3) = o(4) = 5$/

iii. ראשית, נשים לב ש$\langle 4 \rangle = \{4, 1\}$. הפעם הפעולה היא כפל ולא חיבור. $|U_{15}| = 8$, ולכן בחבורה G/H יש 4 איברים. צריך לבחור 4 נציגים. נשים לב ש$\{1, 2, 7, 11\}$אינם שקולים. כלומר, לכל אחד מהם יש קוסט אחר. (אפשר לחשב ישירות את הקוסט של כל אחד ולהיווכח בכך). לכן אלו כל הנציגים של האיברים בחבורה. $(gH)^k = g^k \in H \iff g^kH = H \iff H$. אנחנו בעצם שואלים מהי החזקה המינימלית של כל מספר כך שהוא יהיה שווה ל1 או

ל4 (כמובן מודולו 15, כי הפעולה מושרית מהפעולה בU_{15}). לכן
$o(1) = 1, o(2) = 2, o(7) = 2, o(11) = 2$

7. הוכיח שבחבורה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר מסדר סופי, וכן לכל מספר טבעי קיים איבר מהסדר הזה.
פתרון:

יהי איבר כללי בחבורה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. הוא מהצורה $q+\mathbb{Z}$ עבור $q \in \mathbb{Q}$. כלומר, $q = \frac{n}{m}$ עבור $n, m \in \mathbb{N}$. נקבל: $(\frac{n}{m} + \mathbb{Z})^m = m\frac{n}{m} + \mathbb{Z} = n + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, שזה איבר היחידה בחבורת המנה.

יהי $n \in \mathbb{N}$. נחשב את הסדר של $\frac{1}{n} + \mathbb{Z}$. $(\frac{1}{n} + \mathbb{Z})^m = \mathbb{Z} \iff m\frac{1}{n} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \iff \frac{m}{n} \in \mathbb{Z} \iff n|m$. לכן $o(\frac{1}{n} + \mathbb{Z}) = n$. כלומר, לכל מספר טבעי יש איבר מהסדר הזה.

8. נסמן $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. לאיזה חבורה מוכרת איזומורפי $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}_+^\times$?
פתרון: נטען שיש רק 2 מחלקות.

מחלקה אחת היא כמובן: $(0, \infty)$. לכן אם יש רק 2 מחלקות, המחלקה השניה צריכה להיות $(-\infty, 0)$. כלומר, צריך להראות שלכל שני מספרים שליליים, x, y, יש להם אותו קוסט. זה שקול לכך ש: $xy^{-1} \in (0, \infty)$. זה כמובן נכון, כי מנה של שני מספרים שליליים היא חיובית.

אם בחבורת המנה יש רק שני איברים, אז החבורה היא בהכרח $\mathbb{Z}_2$.