תרגיל: $y' + (\ln x)y = 0$
פתרון: נפתור בשתי דרכים.
מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון:
$a(x) = \ln x$
$\int \ln x = \int 1 \cdot \ln x$
$\int u'v = uv - \int uv'$
$u' = 1, v = \ln x$

$$\int 1 \cdot \ln x = x \ln x - \int 1 = x \ln x - x$$

$$y = ce^{-(x \ln x - x)}$$

דרך שניה, באמצעות מד"ר פרידה:

$$y' = -(\ln x)y$$

$$\frac{dy}{dx} = -(\ln x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -\ln x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\ln x dx$$

$$\ln |y| = -x \ln x + x + c$$

$$|y| = e^{-x \ln x + x + c}$$

$$y = \pm e^c e^{-x \ln x + x}$$

יכולים להציב $d = \pm e^c$ ואז לקבל

$$y = de^{-x \ln x + x}$$

תרגיל: הוכיחו

$$(\cos z)' = -\sin z$$

פתרון:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} =$$

$$\frac{e^{xi-y} + e^{-xi+y}}{2} = \frac{e^{-y}cis(x) + e^{y}cis(-x)}{2} =$$

$$\frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} =$$

$$\frac{(\cos x)(e^{-y}+e^{y}) + i(\sin x)(e^{-y}-e^{y})}{2}$$

$$U(x,y) = \frac{1}{2}(\cos x)(e^{-y}+e^{y})$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(\sin x)(e^{-y}-e^{y})$$

בשביל להוכיח שהפונקציה גזירה צריך לבדוק האם מתקיים:

$$U_x = V_y, U_y = -V_x$$

$$U_x = -\frac{1}{2}\sin x(e^{-y}+e^{y})$$

$$V_y = \frac{1}{2}\sin x(-e^{-y}-e^{y})$$

אכן מתקיים שוויון.

$$U_y = \frac{1}{2}(\cos x)(-e^{-y}+e^{y})$$

$$V_x = \frac{1}{2}(\cos x)(e^{-y}-e^{y})$$

אכן מתקיים $U_y = -V_x$.

$$\cos'(x+iy) = U_x + iV_x = -\frac{1}{2}\sin x(e^{-y}+e^{y}) + i\frac{1}{2}(\cos x)(e^{-y}-e^{y})$$

$$-\sin(z) = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} =$$

$$-\sin(x+iy) = -\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} =$$

$$-\frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = -\frac{e^{-y}cis(x) - e^{y}cis(-x)}{2i} =$$

$$-\frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i}$$

נכפיל מונה ומכנה ב$-i$

$$\frac{ie^{-y}(\cos x + i\sin x) - ie^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(-e^{-y}\sin x - e^{y}\sin x) + i\frac{1}{2}(e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x)$$

קיבלנו שוויון.

תרגיל: הוכיחו שלכל $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sin(z+w) = \sin z\cos w + \cos z\sin w$$

פתרון:

$$\sin(z+w) = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}$$

$$\sin z\cos w + \cos z\sin w = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} =$$

$$\frac{(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})}{4i} =$$

$$\frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iz}e^{iw} - e^{iz}e^{-iw} + e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw}}{4i} =$$

$$\frac{2e^{iz}e^{iw} - 2e^{-iz}e^{-iw}}{4i} = \frac{e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}}{2i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}$$

תרגיל: $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}$

פתרון:

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} = e^{\ln_{\mathbb{C}}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}}} = e^{(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})\ln_{\mathbb{C}}(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})}$$

כעת צריך לחשב את $\ln_{\mathbb{C}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = cis(-\frac{\pi}{6})$$

$$\ln cis(-\frac{\pi}{6}) = x + iy$$

$$e^{x+iy} = cis(-\frac{\pi}{6})$$

$$e^x cis(y) = cis(-\frac{\pi}{6})$$

$$e^x = 1 \to x = 0$$

$$y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\ln_{\mathbb{C}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 0 + (-\frac{\pi}{6} + 2\pi k)i$$

אם רוצים ענף מרכזי אז לוקחים $k = 0$.

$$(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) \ln_{\mathbb{C}}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k)i =$$

$$-\pi k + \frac{\pi}{12} + i(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \sqrt{3}\pi k)$$

אנחנו רוצים לחשב את

$$e^{-\pi k + \frac{\pi}{12} + i(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \sqrt{3}\pi k)} = e^{-\pi k + \frac{\pi}{12}} cis(\frac{\sqrt{3}\pi}{12} - \sqrt{3}\pi k)$$

תרגיל: מצאו פתרון כללי למד"ר הבאה:

$$2y'' + 3y' + 4y = 5x$$

פתרון: ראשית נפתור את המד"ר ההומוגנית המתאימה

$$2y'' + 3y' + 4y = 0$$

הפולינום האופייני: $2\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{23}}{4} i$$

יש שני שורשים מרוכבים, לכן הפתרון הכללי של המד"ר ההומוגנית הוא:

$$y_h = c_1 e^{-\frac{3}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{23}}{4}x) + c_2 e^{-\frac{3}{4}x}\sin(\frac{\sqrt{23}}{4}x)$$

ועכשיו נמצא פתרון פרטי. $y_p = ax + b$.

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

נציב במד"ר המקורית.

$$3a + 4(ax + b) = 5x$$

$$4a = 5 \Longrightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$3a + 4b = 0 \Longrightarrow b = -\frac{15}{16}$$

לכן $y_p = \frac{5}{4}x - \frac{15}{16}$. ולבסוף

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-\frac{3}{4}x}\cos(\frac{\sqrt{23}}{4}x) + c_2 e^{-\frac{3}{4}x}\sin(\frac{\sqrt{23}}{4}x) + \frac{5}{4}x - \frac{15}{16}$$

שאלה: האם ניתן להוכיח זהויות בצורה הזאת?

$$\cos(z+w)+i\sin(z+w) = cis(z+w) = cis(z)cis(w) = [\cos(z)+i\sin(z)][\cos(w)+i\sin(w)] =$$

$$[\cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)] + i[\cos z \sin w + \sin z \cos w]$$

תשובה: לא. כי הטענה ש$a + bi = c + di$ גורר ש$a = c \wedge b = d$ נכונה רק כאשר a, b, c, d מספרים ממשיים. למשל בדוגמא הבאה זה לא יעבוד:

$$a + bi = c + di$$

$$a = 0, b = i, c = -1, d = 0$$

תרגיל: הוכיחו

$$\sin \bar{z} = \overline{\sin(z)}$$

פתרון: $z = x+iy, \bar{z} = x - iy$.

$$\sin(x-iy) = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{y} - e^{-ix}e^{-y}}{2i}$$

$$\overline{\sin(x+iy)} = \overline{\left(\frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i}\right)} = \frac{\overline{(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)})}}{-2i}$$

נעשה חישוב עזר של הביטוי $(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)})$.

$$= e^{ix-y} - e^{-ix+y} = e^{-y}cis(x) - e^{y}cis(-x) =$$

$$e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)$$

$$\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i\sin x(e^{-y} + e^{y})$$

$$\overline{(\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i\sin x(e^{-y} + e^{y}))} = \cos x(e^{-y} - e^{y}) - i\sin x(e^{-y} + e^{y})$$

כלומר,

$$\overline{\sin z} = \frac{\cos x(e^{-y} - e^{y}) - i\sin x(e^{-y} + e^{y})}{-2i} = \frac{-\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i\sin x(e^{-y} + e^{y})}{2i}$$

נחזור שוב לאגף שמאל של המשוואה ונמשיך לפתח אותו

$$\sin(x-iy) = \frac{e^{i(x-iy)} - e^{-i(x-iy)}}{2i} = \frac{e^{ix+y} - e^{-ix-y}}{2i} =$$

$$\frac{e^{y}cis(x) - e^{-y}cis(-x)}{2i} = \frac{e^{y}(\cos x + i\sin x) - e^{-y}(\cos x - i\sin x)}{2i} =$$

$$\frac{\cos x(e^{y} - e^{-y}) + i\sin x(e^{y} + e^{-y})}{2i}$$

וקיבלנו שוויון.

תרגיל: $a_1 = 2i, a_5 = 4i$

$$a_5 = a_1 q^4$$

$$q^4 = 2$$

$$z^4 = 2cis0$$

$$z_k = \sqrt[4]{2}cis(\frac{2\pi k}{4}) = \sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi k}{2})$$

$$z_0 = \sqrt[4]{2}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{2})$$

וכו'.
נמצא את הסכום של 5 האיברים הראשונים.

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2i(\sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{2})^5 - 1)}{\sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{2}) - 1} = \frac{2i((\sqrt[4]{2})^5 cis(\frac{5\pi}{2}) - 1)}{\sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{2}) - 1}$$

בשביל לחשב את הביטוי פחות 1 חייבים לעבור לצורה קרטזית.

$$\sqrt[4]{2}cis(\frac{\pi}{2}) = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt[4]{2}i$$

נקבל במונה ובמכנה מספרים בהצגה קרטזית, ובסוף נכפיל בצמוד של המכנה.

$$z^n = x$$

כאשר x ממשי, אז לכל מספר מרוכב שמהווה שורש, גם הצמוד שלו מהווה שורש.
לא יהיו שאלות על התכנסות של סדרות, פירוק פולינומים ורציפות.

$$\sin \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{\overline{-iz}} - e^{\overline{iz}}}{2i}$$

$$\overline{\sin z} = ^{-}$$

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}$$