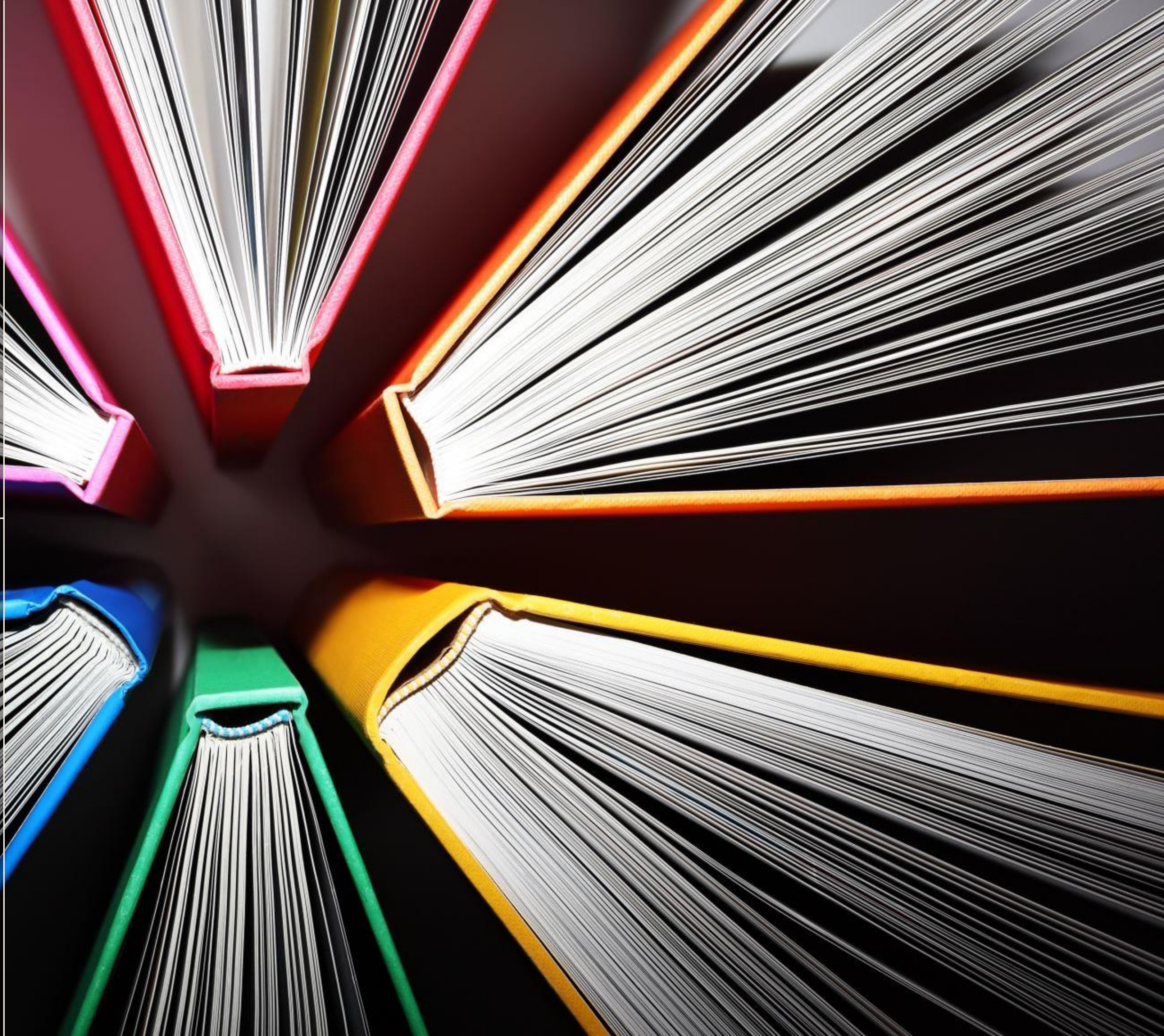
תרגיל 7- אושרית

נורמה, זווית בין וקטורים, אורתוגונליות, אורתונורמליות



תזכורת תרגולים קודמים:

מרחבי מכפלה פנימית

הגדרה: V מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

מכפלה פנימית (סקלרית/) על V היא פונק' $\langle \cdot,\cdot \rangle : V\times V \to \mathbb{F}$

המקיימת את התכונות: 1. אי-שליליות: לכל $v\in V$ $\langle v,v\rangle \ge 0$

ומתקיים: $\langle v,v\rangle = 0 \iff v=0$

2. סימטריות (הרמיטיות): לכל $u,v\in V$ מתקיים:

$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

3. לינאריות במשתנה הראשון: לכל $u,v,w\in V$

ולכל $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$:

$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

שימו לב שמעל הממשיים מ"פ היא חילופית

הערה: לכל מ"ו V יש הרבה מ"פ שונות על V

הגדרה: יהי V ממ"פ.

הנורמה של V היא פונק' $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$

שמקיימת:

1. $\|v\| \geq 0$ לכל $v \in V$ — אי שליליות

   $\|v\| = 0 \iff v = 0$

2. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ — הומוגניות

3. אי-שיוויון המשולש - $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

דוגמא:

הנורמה המושרית מהמ"פ: $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$

ונח ב-$\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית $\|(x,y)\| = \sqrt{\langle (x,y),(x,y) \rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$

במישור אר בריבוע
עם מ"פ סטנדרטית
הנורמה היא
המרחק הרגיל
שאנחנו מכירים

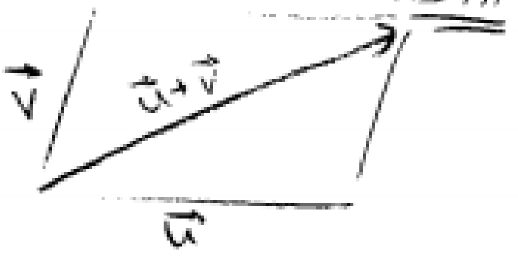
הנורמה בתרגיל היא הנורמה המושרית

תרגיל: הוכח את כלל המקבילית מעל $\mathbb{R}$:

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

לפי הגדרת נורמה מושרית

הוכחה:



$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle + \langle u-v,u-v\rangle$$

לינאריות במשתנה ראשון

$$= \langle u,u+v\rangle + \langle v,u+v\rangle + \langle u,u-v\rangle - \langle v,u-v\rangle$$

כי מעל $\mathbb{R}$ יש גם לינאריות במשתנה שני:

$$= \underbrace{\langle u,u\rangle}_{=\|u\|^2} + \cancel{\langle u,v\rangle} + \cancel{\langle v,u\rangle} + \underbrace{\langle v,v\rangle}_{=\|v\|^2} + \langle u,u\rangle - \cancel{\langle u,v\rangle} - \cancel{\langle v,u\rangle} + \langle v,v\rangle$$

$$= 2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

מש"ל ■

הערה: כלל זה נכון רק לנורמות שמושרות ממכפלה פנימית

הגדרת זוויות בין וקטורים:

הערה: הנורמה זו הנורמה המושרית מהמ"פ

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|\,|v|}$$

דוגמא:

ב- $\mathbb{R}^3$ נתון $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(2,1,2)$

נמצא את הזווית שביניהם:

$$\cos\alpha = \frac{2+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot 3} \Rightarrow \alpha = 35.264...$$

עם מ"פ סטנדרטית ונורמה מושרית מסטנדרטית

אורתוגונליות-הגדרות חשובות

הערה:
מעכשיו V
ממ"פ

הגדרה של זוג וקטורים מאונכים

$$\langle v,w\rangle=0 \iff \underbrace{v\perp w}_{\text{מאונך}}$$

שני וקטורים שמאונכים $v\perp w$ נקראים "אורתוגונליים"

קבוצה אורתוגונלית

הגדרה: $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ נקראת "אורתוגונלית" אם לכל $1\le i\ne j\le n$ מתקיים $\langle v_i,v_j\rangle=0$

לדוג:

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$ היא קב' אורתוגונלית ב- $\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הסטנדרטית

כי:

$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 0 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \text{[illegible]} = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$$

אורתונורמליות-הגדרות חשובות

① וקטור "מנורמל" הוא וקטור באורך 1 (כלו' $\|v\|=1$)

נרמול וקטור:

אם יש וקטור v שלא מנורמל ורוצים לנרמל אותו אז $\frac{v}{\|v\|}$ ← מנורמל

לדוגמה: $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ הוא לא מנורמל כי $\left\|\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}\neq 1$

ננרמל אותו: $\frac{\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}}{\sqrt{53}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{53}}\\ \frac{7}{\sqrt{53}}\end{pmatrix}$

קבוצה אורתונורמלית

הגדרה: קבוצה "אורתונורמלית" היא קב' אורתוגונלית שכל הוקטורים בה הם באורך 1.

קבעו האם הקבוצה אורתונורמלית?

דוג': ① $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ זו דוג' לווקטורים מנורמלים שהם לא קב' אורתונורמלית (אונ')

כי הם לא מאונכים...

למשל $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot\bar{i} + 0\cdot 0 = -i$

הערה: בדוגמאות הבאות המ"פ היא המ"פ הסטנדרטית.

② $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ $\rightarrow$ בסיס אונ' ל-$\mathbb{R}^2$

③ $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\rightarrow$ קבוצה אונ' ב-$\mathbb{R}^3$

④ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\rightarrow$ היא קב' אורתוגונלית ולא אונ'!

(כי ווקטור ה-0 נמצא שם ואורכו לא 1)

תרגיל: תהא Z קב' אורתוגונלית כך ש- $0 \notin Z$

צ"ל Z בת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה S לא בת"ל

$$S = \{v_1, \dots, v_n\}$$

ונניח בה"כ v_n תלוי באחרים. ז"א $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$

(לפחות אחד מה- $\alpha_i \neq 0$ כי אחרת $v_n = 0$ אבל נתון $0 \notin S$)

נניח $\alpha_j \neq 0$.

לינאריות רכיב ראשון

$$\langle v_n, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \, , \, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_j \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \dots + \alpha_{n-1} \underbrace{\langle v_{n-1}, v_j \rangle}_{=0}$$

כי נתון S אורתוגונלית

$$= \underbrace{\alpha_j}_{\neq 0} \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{\neq 0} \neq 0$$

$\Leftarrow$ קיבלנו $\langle v_n, v_j \rangle \neq 0$ <u>סתירה!</u> הנחנו S אורתוגונלית

הגדרה: "**בסיס אורתונורמלי**" הוא בסיס שהוא גם הקבוצה אורתונורמלית

קצת מוטיבציה ☺

מה זה טוב בסיס כזה?

נניח $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס אונ' (אורתונורמלי) של V

ויהי $v\in V$ אז אפשר להציג $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i$ (כי B בסיס)

אז מתקיים $\langle v,w_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i , w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \langle w_i,w_j\rangle \quad \forall j$

$$= \alpha_1\underbrace{\langle w_1,w_j\rangle}_{0} + \dots + \alpha_j\underbrace{\langle w_j,w_j\rangle}_{=\|w_j\|^2=1} + \dots + \alpha_n\underbrace{\langle w_n,w_j\rangle}_{0}$$

0 כי מאונכים שהרי B אונ'.

כי B אונ'

$$= \alpha_j$$

מסקנה! קיבלנו שלכל $1 \le j \le n$ $\langle v, w_j \rangle = \alpha_j$ (כאשר $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$)

• ולכן בעצם

$$v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \dots + \langle v, w_n \rangle w_n$$

• כ"א

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \langle v, w_1 \rangle \\ \langle v, w_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_n \rangle \end{pmatrix}$$

במילים פשוטות- בהינתן בסיס אורתונו' ניתן לחלץ את המקדם של הוקטור בצירוף הלינארי ע"י ביצוע מכפלה פנימית בין הוקטור v לבין הוקטור בבסיס האורתונורמלי.

אז –בהינתן סתם בסיס איך מוצאים בסיס אורתונו'?

גראם שמידט

אלגוריתם: נתון בסיס כלשהו $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ (של V)

שלב א'! (אורתוגונליזציה)

נבנה בסיס אורתוגונלי $B_0=\{w_1,\dots,w_n\}$ ע"י

$$w_1=v_1$$

$$w_2=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\cdot\vec{w_1}$$

$$w_3=v_3-\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\vec{w_1}-\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\vec{w_2}$$

$$\vdots$$

$$w_n=v_n-\frac{\langle v_n,w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\vec{w_1}-\dots-\frac{\langle v_n,w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2}\vec{w_{n-1}}$$

שלב ב'! (נרמול)

$$\tilde{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$$

כאשר $u_i=\frac{w_i}{\|w_i\|}$

דוגמה: נתון $B=\left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}},\overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\overset{v_3}{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}\right\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ (כאשר זו המכפ' הסטנדרטית)

מצאו בסיס אונ' לפי תהליך גראם שמידט

פתרון: **שלב א'!**

$$w_1=v_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{\left\langle\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/5\\2/5\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1/5\\2/5\\0\end{pmatrix}\right\|^2}\cdot\begin{pmatrix}1/5\\2/5\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}-(-1)\begin{pmatrix}1/5\\2/5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$B_o = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ סה״כ קיבלנו

<u>שלב ב:</u> נרמול

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{1}{5}}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס אורתונורמלי שפורש את <u>אותו</u> מרחב של $\{v_1, v_2, v_3\}$

בהצלחה!!!