מבחן באלגברה לינארית 2

מועד ב' תשפ"א

מרצים: אליהו מצרי ושפרה רייף
מתרגלות: תמר בר-און, נועה כהן, אמונה ליפסקר ואושרית שטוסל.
משך המבחן: שעתיים.

שאלה 1. *(א)* ***(19 נקודות)*** *תהי $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצה מרוכבת שכל רכיביה ממשיים. נתון ש*

$$\text{rank}A = 2, \quad A^4 + A^2 = 0, \quad A^4 \neq 0.$$

מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

(ב) ***(15 נקודות)*** *קבעו אם המטריצות שלהלן דומות. נמקו.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

שאלה 2. *תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה אנטי-סימטרית, כלומר $A = -A^t$.*

(א) ***(13 נקודות)*** *הוכיחו שהערכים העצמיים של A הם מדומים טהורים.*

(ב) ***(13 נקודות)*** *יהיו*

$$v_1 := \begin{bmatrix} -2+\sqrt{6}i \\ 2+\sqrt{6}i \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} -2-\sqrt{6}i \\ 2-\sqrt{6}i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

מצאו בסיס v_3 למרחב הניצב ל-$span\{v_1, v_2\}$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{C}^3$.

(ג) ***(7 נקודות)*** *נניח ש-v_1, v_2 מהסעיף הקודם וקטורים עצמיים של A. האם בהכרח v_3 גם וקטור עצמי של A? נמק.*

שאלה 3. *יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-$||Av|| = ||Bv||$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$ (עבור הנורמה של המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב-$\mathbb{R}^n$). נניח בנוסף ש-A הפיכה.*

(א) ***(11 נקודות)*** *הוכח ש-B הפיכה.*

(ב) ***(11 נקודות)*** *הוכח ש-AB^{-1} אוניטרית.*

(ג) ***(11 נקודות)*** *הוכיחו/ הפריכו: יהי $W \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-מרחב. נניח ש-$A(W) \subseteq W$. אזי $A^t(W^\perp) \subseteq W^\perp$.*

הערה: עבור מטריצה $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ועבור $U \subseteq \mathbb{R}^n$ נסמן

$$B(U) := \{Bu \mid u \in U\}.$$