

אלגברה לינארית 2

תרגיל 6

הגשה בתוך שבוע לידי המתרגל(ת) בלבד.

שאלה 1

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של A .
- מצאו מטריצה הפיכה P כך ש $D = P^{-1}AP$ אלכסונית.
- חשבו את A^6 .
- מצאו מטריצה B כך ש $B^2 = A$.

שאלה 2:

יהיו $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. חשבו את $A^6 B^{2517}$.

שאלה 3:

תהי A מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ מעל שדה המרוכבים. מצאו ערכים עצמיים.

בכיתה ראינו שלאותה צורה של מטריצה אין תמיד ע"ע, איך הסתירה לכאורה מתיישבת?

שאלה 4:

יהי $q(x, y) = 3x^2 - 6xy + 11y^2$. מצאו מטריצה סימטרית A כך ש $q(x, y) = (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

מצאו את ערכיה העצמיים. השתמשו בהם להצגת הפולינום בצורה $q(\tilde{x}, \tilde{y}) = a\tilde{x}^2 + b\tilde{y}^2$

הביעו בצורה מפורשת את הקשר בין הקורדינטות \tilde{x} ו- \tilde{y} והקורדינטות x ו- y (השתמשו בוקטורים העצמיים).

שאלה 5: (סעיף ב קשה)

יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מעל שדה F , תהי $S \subseteq F$. נסמן $f[S] := \{f(a) : a \in S\}$

- א.** תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ויהי $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. הוכיחו כי $f[\sigma(A)] \subseteq \sigma(f(A))$.
- ב.** נסמן ב $\sigma(A)$ את קבוצת הערכים העצמיים של המטריצה A (קבוצה זו נקראת הספקטרום של A). הרדיוס הספקטראלי של $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מוגדר ליהיות

$$r(A) := \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ משולשית כך ש $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ הוכיחו כי הגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} (I + A + \dots + A^k)$

קיים או"א $r(A) < 1$.

הערה: אומרים שסידרה של מטריצות $\{A_n\}$ באשר $A_k = (a_{i,j}^k)$ היא המטריצה ה- k (כאן k - $a_{i,j}^k$ הוא אינדקס, ולא חזקה) מתכנסת למטריצה $B = (b_{i,j})$ אם לכל i, j מתקיים $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i,j}^k = b_{i,j}$. דהיינו גבול של סדרת מטריצות, היא מטריצת גבולות הרכיבים שלהן.