בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעח

14/5/2018 (כ"ט אייר)

מתרגל: אחיה בר־און.

- ענו על כל השאלות. **יש לנמק כל תשובה!!**
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. (על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.)**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה ועשרים דקות. יש 9 סעיפים בבוחן, כל אחד שווה 12 נקודות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים, קבעו האם הוא נכון או לא נכון. בשאלה זאת נדרשת רק תשובה סופית ללא נימוק.

(א) עבור כל מערכת משוואות $Ax=b$ שיש לה פתרון יחיד מתקיים כי A ריבועית.
פתרון:
לא נכון למשל $A=b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד $x=1$.

(ב) עבור כל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אנטי סימטרית (כלומר $A^t=-A$) מתקיים כי $-A$ אנטי סימטרית.
פתרון:
נכון. תהא A אנטי סימטרית אזי $A^t=-A$ ולכן $(-A)^t=-A^t=-(-A)$ ולכן גם $-A$ אנטי סימטרית.

(ג) עבור כל שתי מטריצות הפיכות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים כי $A+B$ הפיכה.
פתרון:
לא נכון. למשל מטריצת היחידה I הפיכה וגם $-I$ הפיכה אבל הסכום $I+(-I)=0$ אינה הפיכה.

(ד) יהא V מ"ו ותהא $S=\{v_1,\ldots,v_n\}\subseteq V$ קבוצה בת"ל. אזי בהכרח כי $0_V\notin S$
פתרון:
נכון. אחרת $0_V\in S$ ו $1_{\mathbb{F}}\cdot 0_V=0_V$ הוא צ"ל לא טרויאלי באיברי S שמתאפס בסתירה לכך ש S בת"ל.

2. יהא V מ"ו מעל השדה $\mathbb{R}$. יהיו $v_1,v_2\in V$ שני וקטורים בת"ל.

(א) עבור כל $-4\le t\le 4$ שלם נגדיר

$$w_1=(2-t)\,v_1+3v_2$$
$$w_2=tv_1+(2+t)\,v_2$$

. קבעו עבור אילו ערכי t מתקיים כי הוקטורים w_1,w_2 בת"ל.
פתרון:
נניח צירוף לינארית $\alpha_1w_1+\alpha_2w_2=0$ ונבדוק האם בהכרח $\alpha_1=\alpha_2=0$. מהצי"ל שמתאפס נקבל כי $[\alpha_1(2-t)+\alpha_2t]\,v_1+[3\alpha_1+(2+t)\,\alpha_2]\,v_2=0$. כיוון ש v_1,v_2 בת"ל נקבל כי המקדמים מוכרחים להיות שווים אפס, כלומר נקבל את מערכת המשוואות:

$$\alpha_1(2-t)+\alpha_2t=0$$
$$3\alpha_1+(2+t)\,\alpha_2=0$$

או בצורה מטריצית $\left(\begin{array}{cc|c}2-t & t & 0\\ 3 & 2+t & 0\end{array}\right)$. כעת w_1,w_2 בת"ל אמ"מ למערכת $\left(\begin{array}{cc|c}2-t & t & 0\\ 3 & 2+t & 0\end{array}\right)$ יש רק את הפתרון הטי'. נבדוק מתי זה קורה:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2-t & t & 0\\ 3 & 2+t & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}3 & 2+t & 0\\ 2-t & t & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}3 & 2+t & 0\\ 0 & t-\frac{(2+t)(2-t)}{3} & 0\end{array}\right)$$

ולכן הפתרון היחידי הוא הטי' אמ"מ $t-\frac{(2+t)(2-t)}{3}\neq 0$. לכן w_1,w_2 ת"ל אמ"מ $t-\frac{(2+t)(2-t)}{3}=0$ או $t^2+3t-4=0$ שהפתרון הוא

$$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot(-4)}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=-4,1$$

(ב) נגדיר $W=\{3\alpha v_1+2\alpha v_2|\,\alpha\in\mathbb{R}\}$. הוכיחו כי W תת מרחב ומצאו את המימד שלו.

פתרון:

מהגדרת W נקבל כי

$$W=\{3\alpha v_1+2\alpha v_2|\,\alpha\in\mathbb{R}\}=\{\alpha\left(3v_1+2v_2\right)|\,\alpha\in\mathbb{R}\}=span\,\{3v_1+2v_2\}$$

ולכן $\{3v_1+2v_2\}$ קבוצה פורשת של W. בנוסף $3v_1+2v_2\neq 0$ כי v_1,v_2 בת"ל ולכן $\{3v_1+2v_2\}$ גם קבוצה בת"ל וסה"כ נקבל כי $\{3v_1+2v_2\}$ בסיס של W ולכן המימד של W הוא 1.

3. תהא $A\in\mathbb{R}^{3\times 2}$. המתרגל החליט לדרג את המטריצה $(A|I)$ (כאשר $I\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ מטריצה היחידה) והוא הגיע במהלך דירוגו למטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

(א) מצאו את ההופכית של המטריצה $E=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2.5 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

(ב) מצאו את הצורה המדורגת קנונית של A.

(ג) מצאו את A וקבעו האם היא הפיכה.

פתרון:

נמצא את E^{-1} בעזרת האלגוריתם שראינו בכיתה:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & & \\ -2 & 1 & 0 & & 1 & \\ 2.5 & -\frac{3}{4} & 1 & & & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & & \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & \\ 2.5 & -\frac{3}{4} & 1 & & & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0.5 & & \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & \\ 5 & -\frac{6}{4} & 2 & & & 2 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0.5 & & \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{4} & 2 & -2.5 & & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0.5 & & \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0.5 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0.5 & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0.25 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & - \end{array}\right.$$

ולכן $E^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$.

לשם מציאת הצורה הקנונית של A צריך להמשיך את הדירוג ולקבל $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

כדי למצוא את A נשים לב כי מתקיים כי $EA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן

$$A=E^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה __

תשובה לשאלה ___

תשובה לשאלה___