מד"ר - תרגול 7

23 באוגוסט 2011

המשך מיון נק' סינגולריות

דוגמה 1

מיין נקודות סינגולריות עבור:

$$\left(x\sin x\right)y^{''}+\cos\left(x\right)y^{'}+e^{x}\cdot y=0$$

פתרון

תזכורת:

$$p\left(x\right)y^{''}+q\left(x\right)y^{'}+R\left(x\right)y=0$$

נבדוק את הגבולות

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)\frac{q\left(x\right)}{p\left(x\right)}\\&\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)^2\frac{R\left(x\right)}{p\left(x\right)}\end{aligned}$$

אם שני הגבולות הנ"ל סופיים נאמר שהנק' סינגולרית רגולרית.
במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}p\left(x\right)&=x\sin x\\q\left(x\right)&=\cos q\\R\left(x\right)&=e^{x}\end{aligned}$$

אז x_0 נקבע ע"י המשוואהס

$$\begin{aligned}p\left(x_0\right)&=0\\x_0\sin x_0&=0\\x_0&\in\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$

נחשב את הגבולות. עבור $x=0$:

$$\lim_{x\to0}x\cdot\frac{\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{\sin x}$$

הגבול אינו קיים לכן הנק' $x=0$ היא סינגולרית אי-רגולרית.
נבדוק עבור נקודות מהצורה $x=\pi k$ כאשר $k\neq0$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi k}\left(x-\pi k\right)\frac{\cos x}{x\cdot\sin x}&=\lim_{x\to\pi k}\frac{x-\pi k}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{x}\\&=\lim_{x\to\pi k}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\pm1}{\pi k}\\&=\pm\frac{1}{\pi k}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\pi k}\frac{\left(x-\pi k\right)^2e^{x}}{x\sin x}=\lim_{x\to\pi k}\frac{e^{x}\left(x-\pi k\right)}{x}\cdot\frac{x-\pi k}{\sin x}=0$$

לכן הנק' $x=\pi k$ עבור $k\neq0$ היא סינגולרית רגולרית.

שיטת פרוביניוס

משתמשים בטורי טיילור כדי למצוא פתרון למשוואה מסדר שני.
תהי x_0 נק' סינגולרית רגולרית של המשוואה

$$y^{''}+p\left(x\right)y^{'}+q\left(x\right)y=0$$

אז למשוואה יש פתרון מהצורה

$$y=\left(x-x_0\right)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$$

כאשר הפתרונות $\lambda_1,\,\lambda_2$ מתקבלים מהמשוואה הריבועית עבור a_0.

מקרה א'

נניח $\lambda_1,\,\lambda_2$ שורשים המקיימים את התנאים הבאים:

1. $\lambda_1,\,\lambda_2$ ממשיים.
2. $\lambda_1>\lambda_2$ (כלומר הריבוי שלהם הוא 1)
3. $\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$.

אז הפתרונות הם מהצורה:

$$\begin{aligned}y_1\left(x\right) &= \left(x-x_0\right)^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\\ y_2\left(x\right) &= \left(x-x_0\right)^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-x_0\right)^n\end{aligned}$$

כלומר

$$y=c_1y_1\left(x\right)+c_2y_2\left(x\right)$$

דוגמה 2

העזר בטור טיילור סביב $x=0$ כדי לפתור את המד"ר הבאה:

$$2x^2y^{''}+7x\left(x+1\right)y^{'}-3y=0$$

פתרון

נשים לב כי יש לבדוק נק' סינגולריות. נסמן:

$$\begin{aligned}p\left(x\right) &= 2x^2\\ q\left(x\right) &= 7x\left(x+1\right)\\ R\left(x\right) &= -3\end{aligned}$$

קל לראות ש$x=0$ היא נק' סינגולרית.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}x\cdot\frac{7x\left(x+1\right)}{2x^2} &= \lim_{x\to0}\frac{7\left(x+1\right)}{2}=3.5\\ \lim_{x\to0}x^2\frac{-3}{2x^2} &= \lim_{x\to0}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

לכן הנק' היא סינגולרית רגולרית.
ידוע כי קיים פתרון מהצורה

$$y=x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

נחפש λ מתאימה (ואז נשתמש במקרים של תנאי א').
נציב במשוואה. ברור כי:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \\ y^{'} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1} \\ y^{''} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda-2} \end{aligned}$$

לאחר הצבה במשוואה נקבל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) a_n x^{n+\lambda} + 7x(x+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0$$

נסדר את הטורים:

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) x^{n+\lambda} + 7\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda+1} + 7\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n x^{n+\lambda} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0$$

נסדר את הכל לפי $x^{n+\lambda}$:

$$2a_0\lambda(\lambda-1) + 7a_0\lambda - 3a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \left[2(\lambda+n)(n+\lambda-1) + 7(\lambda+n) - 3 \right] + 7(n+\lambda-1) a_{n-1} \right\} x^{n+\lambda} = 0$$

מהשוואות מקדמים נקבל:

$$\begin{aligned} 2a_0\lambda(\lambda-1) + 7a_0\lambda - 3a_0 &= 0 \\ a_0 (2\lambda(\lambda-1) + 7\lambda - 3) &= 0 \\ 2\lambda^2 + 5\lambda - 3 &= 0 \end{aligned}$$

למעשה מתרגיל זה אפשר להוכיח בצורה כללית את המשוואה האינדיציאלית.
נקבל כי הפתרון למשוואה האינדיציאלית

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &= -3 \end{aligned}$$

נבודד את a_n ונקבל

$$a_{n_\lambda} = \frac{7(\lambda+n-1) a_{n-1}}{(\lambda+n)(\lambda+n-1) + 7(\lambda+n) - 3}$$

נשאר להציב את ה λ הנ"ל ב y_1, y_2:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_{\frac{1}{2}}} x^n \\ y_2(x) &= x^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_{-3}} x^n \end{aligned}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

עד עכשיו במקרה א' ראינו מה קורה כאשר ההפרש בין השורשים אינו שלם.
ראינו גם כי אם הסינגולריות רגולרית צריך להתקיים

$$\begin{aligned} p_0 &= \lim_{x\to x_0} (x-x_0) \frac{q(x)}{p(x)} \\ q_0 &= \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{p(x)} \end{aligned}$$

אז ניתן להסיק את המשוואה האינדיציאלית:

$$\lambda\left(\lambda-1\right)+p_{0}\lambda+q_{0}=0$$

מקרה ב׳

אם $\lambda_{1}=\lambda_{2}$ אז $y_{1}\left(x\right)$ כמו במקרה א׳.

$$\begin{aligned} y_{2}\left(x\right) &= \frac{\partial y\left(x,\,\lambda\right)}{\partial\lambda}|_{\lambda=\lambda_{2}} \\ &= y_{1}\left(x\right)\ln x+\sum b_{n}\left(x-x_{0}\right)^{n+\lambda_{1}} \end{aligned}$$

מקרה ג׳

$\lambda_{1}-\lambda_{2}$ מספר שלם, אז $y_{1}\left(x\right)$ כרגיל וכן:

$$y_{2}\left(x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\lambda-\lambda_{2}\right)y\left(x,\,\lambda\right)\right]_{\lambda=\lambda_{2}}$$

דוגמה 3

פתור את המד"ר סביב $x=0$:

$$x^{2}y^{''}+xy^{'}+x^{2}y=0$$

פתרון

נחפש האם ב$x=0$ יש נק׳ רגולרית (וכן נקבל את הקבועים עבור המשוואה האינדיציאלית):

$$\begin{aligned} p_{0} &= \lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{x^{2}}=1 \\ q_{0} &= \lim_{x\to0}\frac{x^{2}\cdot x^{2}}{x^{2}}=0 \end{aligned}$$

נקבל את המשוואה:

$$\begin{aligned} \lambda^{2}-\lambda+\lambda+0 &= 0 \\ \lambda^{2} &= 0 \\ \lambda_{12} &= 0 \end{aligned}$$

לכן $\lambda=0$ שורש מריבוי שני שזהו בדיוק מקרה ב׳. לכן הפתרון:

$$y_{1} = \sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+\lambda}$$

(נזכור כי לבסוף נציב $\lambda=0$).
עבור y_{2} יש לגזור לפי λ ולהציב $\lambda=\lambda_{0}$ שבמקרה שלנו שווה ל-0.

$$y_{2}\left(x\right)=\frac{\partial y_{1}\left(x,\,\lambda\right)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}$$

נותר לנו למצוא את התנאי על המקדמים. נעזר במשוואה הדיפרנציאלית.

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+\lambda} \\ y^{'}\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\lambda\right)a_{n}x^{n+\lambda-1} \\ y^{''}\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\lambda\right)\left(n+\lambda-1\right)a_{n}x^{n+\lambda-2} \end{aligned}$$

נציב במד"ר:

$$\begin{aligned}
x^{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(n+\lambda\right)\left(n+\lambda-1\right)x^{n+\lambda-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(n+\lambda\right)x^{n+\lambda-1}+x^{2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+\lambda} &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}\left(n+\lambda\right)\left(n+\lambda-1\right)x^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\lambda\right)a_{n}x^{n+\lambda}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+\lambda+2} &= 0\\
a_{0}\left(\lambda-1\right)x^{\lambda}+a_{1}\left(1+\lambda\right)\lambda x^{\lambda+1}+\lambda x^{\lambda}+\left(1+\lambda\right)x^{1+\lambda} &+\\
+\sum_{n=2}^{\infty}\left[a_{n}\left(n+\lambda\right)\left(n+\lambda-1\right)+\left(n+\lambda\right)a_{n}+a_{n-2}\right]x^{n+\lambda} &= 0
\end{aligned}$$

ולכן נקבל מהמקדמים:

$$\begin{aligned}
a_{0}\lambda\left(\lambda-1\right)+a_{0}\lambda &= 0\\
a_{0}\lambda^{2} &= 0
\end{aligned}$$

מהאיבר הכללי נקבל לאחר חישוב:

$$\begin{aligned}
a_{n}\left(n+\lambda\right)^{2}+a_{n-2} &= 0\\
a_{n} &= -\frac{a_{n-2}}{\left(n+\lambda\right)^{2}}
\end{aligned}$$

מהמשוואה של a_1 נקבל

$$a_{1}\left(1+\lambda\right)^{2}=0$$

לכן בהכרח

$$a_{1}=0$$

ולכן כל האי-זוגיים אפסים.
לכן האיבר הכללי עבור y_1 הוא:

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{\left(2k+\lambda\right)^{2}}$$

וקל לקבל את הטור המתאים עבור y_1.
עבור y_2 נגזור לפי λ את y_1 ונציב $\lambda=0$.

מערכת משוואות לינארית הומוגניות עם מקדמים קבועים

אם נתונה מערכת משוואות מהצורה:

$$\begin{cases}
x_{1}^{'} = a_{11}x_{1}\left(t\right)+a_{12}x_{2}\left(t\right)+...+a_{1n}x_{n}\left(t\right)\\
\vdots\\
x_{n}^{'} = a_{n1}x_{1}\left(t\right)+a_{n2}x_{2}\left(t\right)+...+a_{nn}x_{n}\left(t\right)
\end{cases}$$

נגדיר:

$$\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}x_{1}\\ \vdots\\ x_{n}\end{pmatrix}$$

ניתן לרשום את המערכת כך:

$$\overrightarrow{x}'=A\cdot\overrightarrow{x}$$

נחפש פתרון מהצורה:

$$\overrightarrow{x}=e^{\lambda t}\overrightarrow{v}$$

כאשר $\overrightarrow{v}$ וקטור המקדמים. נציב במשוואה:

$$\overrightarrow{x}\,' = \lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{v}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \lambda e^{\lambda t}\overrightarrow{v} &= Ae^{\lambda t}\overrightarrow{v} \\ \lambda\overrightarrow{v} &= A\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

ולכן $\overrightarrow{v}$ הוא וקטור עצמי של A עבור הע"ע λ.
ישנם שלושה מקרים שונים.

מקרה א'

כל הע"ע שונים וממשיים, אז הפתרון הוא מהצורה:

$$\overrightarrow{x} = c_1e^{\lambda_1 t}\overrightarrow{v_1} + c_2e^{\lambda_2 t}\overrightarrow{v_2} + ... + c_ne^{\lambda_n t}\overrightarrow{v_n}$$

כאשר λ_i ע"ע ו$\overrightarrow{v_i}$ ו"ע מתאים לו.

דוגמה 4

פתור

$$\begin{cases} x_1^{'} &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_2^{'} &= -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3^{'} &= 2x_2 - x_2 \end{cases}$$

נרשום כמטריצה:

$$\overrightarrow{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{x}$$

נחפש ע"ע:

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1) &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

נמצא וקטור עצמי עבור $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

באופן דומה נקבל:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

אז הפתרון הוא:

$$\overrightarrow{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$