89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 1

לוגיקה פסוקית

פסוקים

הגדרה: *פסוק* הוא משפט הטוען טענה כלשהיא העשויה להיות או אמת או שקר (אך לא שניהם).

דוגמה:
- $1+1=2$ הוא פסוק אמיתי.
- $2<1$ הוא פסוק שקרי.

הגדרה: *פסוק אטומי* הוא פסוק בסיסי שלא ניתן לפירוק, כלומר פסוק שטוען טענה יחידה.
הפסוקים בדוגמה הקודמת הם פסוקים אטומים.
פסוק מורכב הוא פסוק שנוצר על ידי שילוב של פסוקים אטומים בעזרת קשרים לוגיים.

דוגמה לפסוקים מורכבים:
- החלון מרובע וגם הכדור עגול.
- $1+1=2$ או $2<1$.

הצרנה

הצרנה היא תהליך תרגום של טענות משפה מדוברת לפסוקים.
הצרנה מתבצעת על בסיס מבנה המשפט ולא על בסיס תוכנו.
השלב הראשון בהצרנה הוא זיהוי הפסוקים האטומים במשפט.

דוגמה: "אם לא תלמד, תכשל בבחינה". נסמן ב p את הפסוק האטומי "תלמד" וב q את הפסוק האטומי "תכשל בבחינה", אזי הפסוק המורכב טוען "אם לא p אז q".

דוגמה: "אם ברי סחרוף לא יופיע ביום הסטודנט, הוא יקליט דיסק חדש". נסמן ב p את הפסוק האטומי "ברי סחרוף יופיע ביום הסטודנט" וב q את הפסוק האטומי "ברי סחרוף יקליט דיסק חדש", אזי הפסוק המורכב טוען "אם לא p אז q".

השלב השני הוא פישוט הפסוקים שקיבלנו באמצעות הקשרים הלוגיים.

קשרים לוגיים

קשר לוגי הוא פעולה על פסוקים שמייצרת פסוק חדש. נגדיר את הקשרים באמצעות טבלאות אמת.

1. קשר השלילה (negation)

זהו קשר אונארי, כלומר קשר שפועל על פסוק אחד. קשר השלילה מסומן על ידי ¬ , ומוגדר בצורה הבאה:

$\boldsymbol{p}$	$\neg\boldsymbol{p}$
T	F
F	T

לדוגמה אם הפסוק p הוא "הדשא ירוק" אזי $\neg p$ הוא "הדשא לא ירוק".
בספרים שונים מסמנים את קשר השלילה בצורה אחרת, למשל $\sim p$ או $\bar{p}$.

2. <u>הקשר גם (conjunction/and)</u>

זהו קשר בינארי, כלומר קשר שפועל על שני פסוקים. הקשר גם מסומן על ידי $\wedge$.
$p \wedge q$ נכון אם גםp נכון וגםq נכון, כלומר טבלת האמת היא מהצורה:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

לדוגמה אם הפסוק p הוא "הוא אוכל" והפסוק q הוא "הוא שותה" אזי $p \wedge q$ הוא "הוא אוכל וגם שותה".

3. <u>הקשר או (disjunction/or)</u>

זהו קשר בינארי. הקשר או מסומן על ידי $\vee$.
$p \vee q$ נכון אם p נכון ו q לא נכון או אםq נכון ו p לא נכון או אם גם p וגם q נכונים, כלומר טבלת האמת היא:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

לדוגמה אם בתפריט עסקי כתוב שלמנה ראשונה ניתן להזמין מרק או סלט, אזי

- אפשר להזמין מרק ולא להזמין סלט
- אפשר להזמין סלט ולא להזמין מרק
- אפשר להזמין מרק וגם להזמין סלט

4. <u>הקשר XOR</u>

זהו קשר בינארי. הקשר XOR מסומן על ידי $\oplus$ (או על ידי $\underline{\vee}$).
$p \oplus q$ נכון אם p נכון ו q לא נכון או אםq נכון ו p לא נכון אך לא אם שניהם נכונים, כלומר טבלת האמת היא:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \oplus q}$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

בדוגמה הקודמת המשמעות של XOR היא

- אפשר להזמין מרק ולא להזמין סלט
- אפשר להזמין סלט ולא להזמין מרק

5. <u>קשר הגרירה (אם-אז)</u>

זהו קשר בינארי. קשר הגרירה מסומן על ידי $\Rightarrow$ (או $\rightarrow$).
$p \Rightarrow q$ לא נכון רק במידה וp נכון אולםq לא נכון, כלומר טבלת האמת היא מהצורה:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

לדוגמה "אם תלמד אז תצליח בבחינה" משמעותו:

- במידה ותלמד מובטח שתצליח בבחינה.
- במידה ולא תלמד יתכן שתצליח בבחינה ויתכן שלא תצליח בבחינה.

6. <u>קשר הגרירה הכפולה (אם ורק אם, בקיצור אם"ם)</u>

זהו קשר בינארי. קשר הגרירה הכפולה מסומן על ידי $\Leftrightarrow$ (או $\leftrightarrow$).
$p \Leftrightarrow q$ נכון במידה שלp ו q יש אותו ערך, כלומר טבלת האמת היא מהצורה:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

לדוגמה "תצליח בבחינה אם ורק אם תלמד" משמעותו:

- במידה ותלמד מובטח שתצליח בבחינה.
- במידה ולא תלמד מובטח שלא תצליח בבחינה.

שקילות פסוקים

הגדרה: שני פסוקים p,q נקראים *פסוקים שקולים* ומסומנים $p \equiv q$ אם ל p ול q יש אותה טבלת אמת.

תרגיל: הוכח ש $(\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{q} \equiv \neg(\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$.
פתרון: נבנה את טבלאות האמת של הפסוקים

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{q}$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	F

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$	$\neg(\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	F	T
F	F	T	F

לשני הפסוקים יש אותה טבלת אמת ולכן $(\boldsymbol{p} \Rightarrow \neg \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{q} \equiv \neg(\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$.

תרגיל: הוכח ש $\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q} \equiv \neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$.
פתרון: נבנה את טבלת האמת של $\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

וטבלת האמת זהה לטבלת האמת של קשר הגרירה.

תרגיל: הוכח ש $\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$.
פתרון: נבנה את טבלת האמת של $(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p}$	$(\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{p})$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

וטבלת האמת זהה לטבלת האמת של קשר הגרירה הכפולה.

תנאי מספיק והכרחי

נסתכל על פסוק מהצורה $p \Rightarrow q$.

p הוא ***תנאי מספיק*** ל q, מכיון שנכונות טענה p גוררת את נכונות טענה q.
שימו לב - "q אם p" משמעותו p תנאי מספיק ל q.
q הוא ***תנאי הכרחי*** ל p, מכיון שאי נכונות טענה q גוררת את אי נכונות טענה p, ($\neg q \Rightarrow \neg p$).
שימו לב - "p רק אם q" משמעותו q תנאי הכרחי ל p.

<u>דוגמה</u>: חשיבה היא תנאי מספיק לקיום. (נסמן חשיבה ב p וקיום ב q)
טענה זו שקולה לטענות:

- אם אני חושב אזי אני קיים. ($p \Rightarrow q$)
- אני קיים אם אני חושב. ($p \Rightarrow q$)
- אם אני לא קיים אזי אני לא חושב. ($\neg q \Rightarrow \neg p$)
- אני חושב רק אם אני קיים. ($p \Rightarrow q$)

זהירות – הטענה "אם אני קיים אזי אני חושב" איננה טענה שקולה!!

<u>דוגמה</u>: פתירת תרגילים היא תנאי הכרחי להצלחה במבחן.
(נסמן פתירת תרגילים ב q והצלחה במבחן ב p)
טענה זו שקולה לטענות:

- נצליח במבחן רק אם נפתור תרגילים. ($p \Rightarrow q$)
- אם לא נפתור תרגילים, לא נצליח במבחן. ($\neg q \Rightarrow \neg p$)
- אם הצלחנו במבחן אז פתרנו תרגילים. ($p \Rightarrow q$)

משמעות הפסוק "נצליח במבחן אם נפתור תרגילים" היא שבמידה ונפתור תרגילים מובטח שנצליח במבחן. (אך עדיין יכול להיות שנצליח במבחן גם בלי לפתור תרגילים)

משמעות הפסוק "נצליח במבחן רק אם נפתור תרגילים" היא שבמידה ולא נפתור תרגילים מובטח שלא נצליח במבחן. (אך לא מובטח שאם נפתור תרגילים נצליח במבחן)

<u>הגדרה</u>: טענה p היא ***תנאי מספיק והכרחי*** לטענה q, אם p תנאי מספיק ל q, וגם p תנאי הכרחי ל q,
כלומר אם $p \Leftrightarrow q$.

<u>דוגמה</u>: במרובע האלכסונים חוצים זה את זה הוא תנאי מספיק והכרחי לכך שהמרובע מקבילית.
טענה זו שקולה לטענה:

- מרובע הוא מקבילית אם ורק אם אלכסוניו חוצים זה את זה.

זהויות לוגיות

לכתוב טבלאות אמת זו דרך מסורבלת לבדוק האם שני פסוקים הם שקולים או לא.
על מנת לפשט את התהליך ניתן להשתמש בזהויות לוגיות:

שם הזהות	**הזהות הלוגית**
חוק המשלים	$p \lor \neg p \equiv T$ $p \land \neg p \equiv F$
חוק הזהות	$p \lor F \equiv p$ $p \land T \equiv p$ $p \lor T \equiv T$ $p \land F \equiv F$
חוק האידמפוטנטיות	$p \lor p \equiv p$ $p \land p \equiv p$
חוק השלילה הכפולה (אינבולוציה)	$\neg\neg p \equiv p$
חוק החילוף (קומוטטיביות)	$p \lor q \equiv q \lor p$ $p \land q \equiv q \land p$ $p \oplus q \equiv q \oplus p$ $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)	$p \lor (q \lor r) \equiv (p \lor q) \lor r$ $p \land (q \land r) \equiv (p \land q) \land r$ $p \oplus (q \oplus r) \equiv (p \oplus q) \oplus r$ $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
חוק הפילוג (דיסטריביוטיביות)	$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$
חוק הספיגה (בליעה)	$p \lor (p \land q) \equiv p$ $p \land (p \lor q) \equiv p$
חוק דה-מורגן	$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
גרירה (אימפליקציה מטריאלית)	$p \Rightarrow q \equiv \neg p \lor q$
גרירה כפולה (שקילות מטריאלית)	$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$
contrapositive (transposition)	$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$
הגדרת XOR	$p \oplus q \equiv (p \lor q) \land \neg(q \land p)$

<u>הוכחת חוק דה מורגן הראשון</u>: נוכיח באמצעות טבלת אמת

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \land q}$	$\neg(\boldsymbol{p \land q})$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg\boldsymbol{p}$	$\neg\boldsymbol{q}$	$\neg\boldsymbol{p} \lor \neg\boldsymbol{q}$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

הוכחת חוק דה מורגן השני:

$$\neg p \wedge \neg q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \neg\neg(\neg p \wedge \neg q) \overset{\text{דה מורגן הראשון}}{\equiv} \neg(\neg\neg p \vee \neg\neg q) \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \neg(p \vee q)$$

תרגיל: הוכח את השקילות $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$.

פתרון:

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} p \wedge (q \vee \neg q) \overset{\text{משלים}}{\equiv} p \wedge T \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv} p$$

תרגיל: הוכח את השקילות (contrapositive) $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

פתרון:

$$\neg q \Rightarrow \neg p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg\neg q \vee \neg p \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} q \vee \neg p \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv} \neg p \vee q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} p \Rightarrow q$$

תרגיל: הוכח את השקילות $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \oplus q$.

פתרון:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} \big((p \wedge \neg q) \vee \neg p\big) \wedge \big((p \wedge \neg q) \vee q\big) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv}$$

$$\big((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)\big) \wedge \big((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)\big) \overset{\text{משלים}}{\equiv} \big(T \wedge (\neg q \vee \neg p)\big) \wedge \big((p \vee q) \wedge T\big) \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv}$$

$$(\neg q \vee \neg p) \wedge (p \vee q) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \neg(q \wedge p) \wedge (p \vee q) \overset{\text{הגדרת XOR}}{\equiv} p \oplus q$$

תרגיל: הוכח את השקילות $\neg\big(p \vee (q \wedge \neg r)\big) \wedge q \equiv \neg p \wedge (r \wedge q)$.

פתרון:

$$\neg\big(p \vee (q \wedge \neg r)\big) \wedge q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \big(\neg p \wedge \neg(q \wedge \neg r)\big) \wedge q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} \big(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg\neg r)\big) \wedge q \overset{\text{שלילה כפולה}}{\equiv} \big(\neg p \wedge (\neg q \vee r)\big) \wedge q \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv}$$

$$\neg p \wedge \big((\neg q \vee r) \wedge q\big) \overset{\text{דיסטריביוטיביות}}{\equiv} \neg p \wedge \big((\neg q \wedge q) \vee (r \wedge q)\big) \overset{\text{משלים}}{\equiv} \neg p \wedge \big(F \vee (r \wedge q)\big) \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv} \neg p \wedge (r \wedge q)$$

הערה: בדרך כלל שיטת העבודה בהוכחת שקילויות היא:

1. החלפת הגרירות הכפולות בעזרת הזהות $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.
2. החלפת הגרירות בעזרת הזהות $q \Rightarrow p \equiv \neg p \vee q$.
3. פישוט הביטוי בעזרת יתר הזהויות.

תרגיל: הצרן את הטענות הבאות והוכח שהן שקולות:

- אם ירד גשם אזי, אם אקח מטריה לא ארטב.
- אם ירד גשם וגם אקח מטריה, אזי לא ארטב.

פתרון: נסמן את הפסוקים האטומיים:

- "ירד גשם" ב p
- "אקח מטריה" ב q
- "ארטב" ב r

הפסוק הראשון טוען $p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r)$.

הפסוק השני טוען $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$.

נוכיח שהפסוקים שקולים:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow \neg r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg p \vee (q \Rightarrow \neg r) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv}$$

$$\neg(p \wedge q) \vee \neg r \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (p \wedge q) \Rightarrow \neg r$$

<u>טאוטולוגיות וסתירות</u>

<u>הגדרה</u>: פסוק p נקרא *טאוטולוגיה* אם ערכו אמת בכל השמה, כלומר כל ערך בטבלת האמת שלו הוא T.
פסוק p נקרא *סתירה* אם ערכו שקר בכל השמה, כלומר כל ערך בטבלת האמת שלו הוא F.

<u>הגדרה שקולה</u>: פסוק p נקרא *טאוטולוגיה* אם $p \equiv T$, ונקרא *סתירה* אם $p \equiv F$.

<u>תרגיל</u>: הוכח שהפסוק $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{q}$ הוא טאוטולוגיה.
<u>פתרון בעזרת טבלת אמת</u>:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$	$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{q}$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

<u>פתרון בעזרת זהויות</u>:

$$\neg(p \wedge q) \vee q \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee q \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv} \neg p \vee (q \vee \neg q) \overset{\text{משלים}}{\equiv} \neg p \vee T \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv} T$$

<u>תרגיל</u>: הוכח שהפסוק $(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q})$ הוא סתירה.
<u>פתרון בעזרת טבלת אמת</u>:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q}$	$(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{p} \Rightarrow \boldsymbol{q})$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

<u>פתרון בעזרת זהויות</u>:

$$(p \wedge \neg q) \wedge (p \Rightarrow q) \overset{\text{גרירה}}{\equiv} (p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (p \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \overset{\text{משלים}}{\equiv} F$$

<u>תרגיל</u>: הוכח שהפסוק $\big((\boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{p}) \wedge \boldsymbol{q}\big) \Rightarrow \boldsymbol{p}$ הוא טאוטולוגיה.
<u>פתרון</u>: תחילה נסתכל על הפסוק $(p \Leftrightarrow q) \wedge q$

$$(q \Leftrightarrow p) \wedge q \overset{\text{גרירה כפולה}}{\equiv} \big((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)\big) \wedge q \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \big((\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)\big) \wedge q \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv}$$

$$(\neg q \vee p) \wedge \big((\neg p \vee q) \wedge q\big) \overset{\text{חוק הספיגה}}{\equiv} (\neg q \vee p) \wedge q \overset{\text{דיסטריבוטיביות}}{\equiv} (\neg q \wedge q) \vee (p \wedge q) \overset{\text{משלים}}{\equiv} F \vee (p \wedge q) \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv} p \wedge q$$

נובע מכך ש $(q \Leftrightarrow p) \wedge q \equiv q \wedge p$, נסמן זאת ב $(\star)$.

$$\big((q \Leftrightarrow p) \wedge q\big) \Rightarrow p \overset{(\star)}{\equiv} (p \wedge q) \Rightarrow p \overset{\text{גרירה}}{\equiv} \neg(p \wedge q) \vee p \overset{\text{דה מורגן}}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee p \overset{\text{קומוטטיביות}}{\equiv}$$

$$(\neg q \vee \neg p) \vee p \overset{\text{אסוציאטיביות}}{\equiv} \neg q \vee (\neg p \vee p) \overset{\text{משלים}}{\equiv} \neg q \vee T \overset{\text{חוק הזהות}}{\equiv} T$$

כללי היסק

כללי היסק הם כללים שבעזרתם בהינתן רשימת הנחות $p_1, \dots, p_n$ ניתן להסיק מסקנה q כך שבמידה וההנחות נכונות המסקנה נכונה, כלומר הפסוק $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$ הוא טאוטולוגיה.
מסמנים זאת בדרך כלל על ידי $p_1, \dots, p_n \vdash q$ או בצורה הבאה

$$\begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

<u>דוגמה (מודוס פוננס)</u>

- הנחה - אם חומי כלב אזי חומי נובח.
- הנחה - חומי כלב.
- מסקנה – חומי נובח.

נסמן "חומי כלב" ב p ו"חומי נובח" ב q. ההנחות הן $p \Rightarrow q, p$ והמסקנה היא q.

<u>דוגמה (מודוס טולנס)</u>

- הנחה - אם חומי כלב אזי חומי נובח.
- הנחה - חומי לא נובח.
- מסקנה – חומי לא כלב.

כעת ההנחות הן $p \Rightarrow q, \neg q$ והמסקנה היא $\neg p$.

<u>רשימת כללי היסק</u>

שם הכלל	כלל ההיסק
פישוט Simplification (Simp.)	$p \wedge q \vdash p$
חיבור Addition (Add.)	$p \vdash p \vee q$
חיתוך Conjunction (Conj.)	$p, q \vdash p \wedge q$
סילוגיזם דיסיונקטיבי Disjunctive Syllogism (D.S.)	$p \vee q, \neg p \vdash q$
מודוס פוננס Modus Ponens (M.P.)	$p \Rightarrow q, p \vdash q$
מודוס טולנס Modus Tollens (M.T.)	$p \Rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$
סילוגיזם היפותטי Hypothetical Syllogism (H.S.)	$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
ספיגה Absorption (Abs.)	$p \Rightarrow q \vdash p \Rightarrow (p \wedge q)$
דילמה קונסטרוקטיבית Constructive Dilemma (C.D.)	$p \Rightarrow q, r \Rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$

<u>תרגיל</u>: הוכח את ההיסקים הבאים:

- הנחות: $p, q, (p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$, מסקנה: s.
  הוכחה: מכלל החיתוך נובע $p, q \vdash p \wedge q$.
  ממודוס פוננס נובע $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s), p \wedge q \vdash r \wedge s$.
  מכלל הפישוט נובע $r \wedge s \vdash s$.
  ולכן $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s), p, q \vdash s$.
- הנחות: $p \Rightarrow \neg q, q \vee r$, מסקנה: $\neg p \vee r$.
  הוכחה: מזהות הגרירה $q \vee r \equiv \neg q \Rightarrow r$
  מסילוגיזם היפותטי נובע $p \Rightarrow \neg q, \neg q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$
  מזהות הגרירה $p \Rightarrow r \equiv \neg p \vee r$
  ולכן $p \Rightarrow \neg q, q \vee r \vdash \neg p \vee r$.
- הנחות: $(p \vee q) \wedge (q \vee r), \neg q$ מסקנה: $p \wedge r$.
  הוכחה: מקומוטטיביות ודיסטריביוטיביות $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \equiv q \vee (p \wedge r)$.
  מסילוגיזם דיסיונקטיבי נובע $q \vee (p \wedge r), \neg q \vdash p \wedge r$.
  ולכן $(p \vee q) \wedge (q \vee r), \neg q \vdash p \wedge r$.

<u>תרגיל</u>: הצרן את הטענות הבאות והוכח את ההיסקים:

- אם אנגן בחצוצרה אז לא אנגן בתופים ובפסנתר. אם לא אנגן בחצוצרה אז לא אנגן בפסנתר.
  אנגן בפסנתר.
  מסקנה: לא אנגן בתופים.
  <u>הוכחה</u>: נסמן "אנגן בחצוצרה" ב p, "אנגן בתופים" ב q, "אנגן בפסנתר" ב r.
  ההנחות הן $p \Rightarrow \neg(q \wedge r), \neg p \Rightarrow \neg r, r$, המסקנה היא $\neg q$.
  ממודוס טולנס נובע $\neg p \Rightarrow \neg r, r \vdash \neg(\neg p)$.
  משלילה כפולה $\neg(\neg p) \equiv p$.
  ממודוס פוננס נובע $p \Rightarrow \neg(q \wedge r), p \vdash \neg(q \wedge r)$.
  מדה מורגן $\neg(q \wedge r) \equiv \neg q \vee \neg r$.
  מסילוגיזם דיסיונקטיבי נובע $\neg q \vee \neg r, r \vdash \neg q$.
- אם הקיץ חם או יורד גשם, הגינה פורחת.
  הקיץ חם ונושבת רוח.
  לכן, הגינה פורחת.
  <u>הוכחה</u>: נסמן "קיץ חם" ב p, "יורד גשם" ב q, "נושבת רוח" ב r, "גינה פורחת" ב s.
  ההנחות הן $p \wedge r, (p \vee q) \Rightarrow s$, המסקנה היא s.
  מכלל הפישוט נובע $p \wedge r \vdash p$.
  מכלל החיבור נובע $p \vdash p \vee q$.
  ממודוס פוננס נובע $p \vee q, (p \vee q) \Rightarrow s \vdash s$.