פיתרון לתרגיל מספר 7

תשובה 1:

א. צריך שלכל היותר הנבדק ה-4 יתאים כי אחרת הנפגע ימות $\left(2+4\cdot 2=10\min\right)$.

יהי X – מסי הנבדקים עד לנבדק המתאים. לכן:

$$X \sim Geom(0.4) \Rightarrow P(X \le 4)=\sum_{i=0}^{3}\left(0.6\right)^{i}\cdot\left(0.4\right)=0.87$$

ב. נסמן ב- Y את מספר התורמים (לכן מספר "הכשלונות הוא $Z=Y-2$)

$$P(O)=\tfrac{1}{3}=0.33$$

$$Z=Y-2\sim NB(2,0.33)\Rightarrow P(Y=4)=P(Z=2)=\binom{4-1}{2-1}0.33^{2}\cdot 0.66^{2}=0.142$$

ג.

$$P(A)=0.5$$

$$0.99<P(Z\ge 1)=1-P(Z=0)\Rightarrow P(Z=0)=0.01$$

$$Z\sim Bin(1,0.5)\Rightarrow 0.01>\binom{1}{0}0.5^{1}=0.5\Rightarrow$$

$$n>\frac{\ln 0.01}{\ln 0.5}=6.643\Rightarrow n\ge 7$$

תשובה 2:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(Y=k)=\sum_{n}B(n,0.5)\cdot P(X=n)$

עתה, $B(n,0.5)=\binom{n}{k}0.5^{k}(1-0.5)^{n-k}=\binom{n}{k}0.5^{n}$ ו- $P(X=n)=(1-p)^{n-1}p$

לכן נקבל ש $P(Y=k)=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{k}0.5^{n}\cdot(1-p)^{n-1}p$

תשובה 3:

$X\sim HG\left(5;20,10\right)$ זאת אומרת שעבור $0\le x\le 5$ מתקיים: $P\left(X=x\right)=\dfrac{\binom{20}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{30}{5}}$.

<u>תשובה 4:</u>

א) $P(X=9)=(0.75)^8(0.25)=0.02502$

ב)

$$P(X>4)=1-\left[P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)\right]$$
$$=1-(0.75)^3(0.25)-(0.75)^2(0.25)-(0.75)(0.25)-(0.25)=0.5664$$

ג) $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0.25}=4$

<u>תשובה 5:</u>

כאשר n גדול ו- p קטן אזי ניתן לקרב את ההתפלגות הבינומית להתפלגות פואסון כאשר $\lambda=np$.

במקרה זה יש לנו 10,000 ניסויים בודדים(n), בכל אחד ההסתברות להצלחה $p=\frac{20}{10000}$ כלומר $X\sim Bin\left(10000,\frac{20}{10000}\right)$ וכיוון שזה דיי מטורף לחשב את כל העניין פשוט נשתמש בקירוב:

$$\lambda\cong np=10000\cdot\frac{20}{10000}=20$$

נסמן בX את מספר הפורשים משירות בחודש ולכן :

$$P(X=30)=\frac{e^{-20}20^{30}}{30!}\approx 0.008$$

<u>תשובה 6:</u>

א. יהי X מספר ההימורים עד לזכייתה הרביעית של המהמרת. ויהי Y מספר ההפסדים עד לזכייתה הרביעית של המהמרת. Y הוא מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים 4 ו $\frac{18}{38}$. כמו כן מתקיים $Y=X-4$ ולכן ההסתברות שתהמר 9 פעמים בסה"כ היא

$$P(X=9)=P(Y=4)=\binom{8}{3}\left(\frac{18}{38}\right)^4\left(\frac{20}{38}\right)^5\approx 0.1139$$

ב. יהי W הרווח של המהמרת ויהי X מספר ההימורים שהשתתפה בהם עד לזכייתה הרביעית. מכיוון שהמהמרת זוכה 4 פעמים בסה"כ לכן מפסידה $Y=X-4$ בסה"כ (מ"מ בינומי שלילי).

$W = 4\cdot 5 - (X-4)\cdot 5 = 20 - 5Y$

לכן
$$E(W) = 20 - 5E(Y) = 20 - 5\cdot\frac{4(1-{}^{18}\!/_{38})}{{}^{18}\!/_{38}} = 20 - \frac{200}{9} = -\frac{20}{9}$$

<u>תשובה 7:</u>

נסמן ב A את המאורע שהסוחר רוכש חבילה. לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

P(A| 4רכיבים פגומים) · 0.3 + P(A| רכיב פגום) · 0.7 =

$$= \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{3}{10} + \frac{\binom{1}{0}\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}}\cdot\frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

כלומר הסוחר אינו רוכש 46% מהחבילות שבדק.

<u>תשובה 8:</u>

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב-X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A \sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$P(E\mid A) = P(X_A > 13) = \left(1-\frac{1}{20}\right)^{13} = 0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B באשר $X_B \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E\mid B) = P(X_B > 13) = \left(1-\frac{1}{15}\right)^{13} = 0.408$

ואת X_C באשר $X_C \sim G\left(\frac{1}{15}\right)$ ולכן $P(E\mid C) = P(X_C > 13) = \left(1-\frac{1}{12}\right)^{13} = 0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(E) = 0.513\cdot\frac{1}{2} + 0.408\cdot\frac{1}{6} + 0.323\cdot\frac{1}{3} = 0.4322$

ב. לפי נוסחת בייס: $P(A\mid E) = \frac{P(X_A > 13)\cdot P(A)}{P(E)} = \frac{0.513\cdot\frac{1}{2}}{0.4322} = 0.594$