תזכורת:

כמה נקודות מההרצאות הקודמות.

1. $|A|=|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל.
2. $|A|\leq|B|$ אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע; ראינו שזה נכון אם ורק אם קיימת $g:B\to A$ על.
3. ק.ש.ב: אם $|A|\leq|B|\wedge|B|\leq|A|$ אז: $|A|=|B|$.
4. $|\mathbb{N}|=\aleph_0$, ראינו שגם: $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$, ובכלל אם $|A|=|B|=\aleph_0$ אז גם: $|A\times B|=|A\cup B|=\aleph_0$. $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר.
5. $|\mathbb{R}|=$ א. ראינו שעוצמת כל הקטעים והקרנות הממשיים היא א. כמו כן: $\aleph_0<$ א.
6. קנטור: $|A|<|P(A)|$.

אריתמטיקה של עוצמות:

אריתמטיקה – חשבון. אנחנו רוצים להגדיר פעולות חשבון על עוצמות – חיבור, כפל וחזקה.

חיבור עוצמות:

תהיינה κ_1,κ_2 שתי עוצמות. איך נגדיר את $\kappa_1+\kappa_2$? ניקח שתי קבוצות A,B זרות המקיימות: $|A|=\kappa_1,|B|=\kappa_2$, ואז נגדיר:

$$|A|+|B|=\kappa_1+\kappa_2=|A\cup B|$$

כלומר, כדי לחבר עוצמות, נמצא שתי קבוצות זרות שעוצמותיהן הן העוצמות שאנו רוצים לחבר, ונחשב את עוצמת האיחוד שלהן.

(למה זה הגיוני? במקרה הסופי: $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$, ואם A,B זרות, נקבל: $|A\cup B| = |A|+|B|$).

למשל, נחשב את: $\aleph_0+\aleph$. כדי לעשות זאת, אנחנו צריכים למצוא קבוצות A,B זרות המקיימות: $|A|=\aleph_0, |B|=\aleph$, ולחשב את: $|A\cup B|$. נבחר, למשל, $A=\mathbb{N}, B=(0,1)$. כעת, נחשב את $|\mathbb{N}\cup(0,1)|$. מתקיים: $(0,1)\subseteq \mathbb{N}\cup(0,1)\subseteq\mathbb{R}$, ולכן:

$$\aleph = |(0,1)| \le |\mathbb{N}\cup(0,1)| \le |\mathbb{R}| = \aleph$$

לכן, לפי ק.ש.ב., נקבל ש: $|\mathbb{N}\cup(0,1)| = \aleph$, וסה"כ: $\aleph_0+\aleph=\aleph$.

ראשית, יש להסביר למה החיבור שהגדרנו אכן מוגדר היטב - להסביר שלא משנה אלו קבוצות A,B ניקח, נקבל את אותה התוצאה.

פורמלית: תהיינה A,B זרות כך ש: $|A|=\kappa_1, |B|=\kappa_2$, ותהיינה C,D זרות כך ש: $|C|=\kappa_1, |D|=\kappa_2$, צ"ל:

$$|A\cup B| = |C\cup D|$$

אם כן, $|A|=|C|=\kappa_1$, ולכן קיימת $f:A\to C$ חח"ע ועל. באופן דומה, קיימת $g:B\to D$ חח"ע ועל. לכן, אפשר להגדיר פונקציה $h:A\cup B\to C\cup D$ באופן הבא:

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A\\ g(x) & x\in B\end{cases}$$

h מוגדרת היטב כי $A\cap B=\emptyset$, ראינו שפונקציה כזו היא אכן חח"ע ועל (בטענת עזר לפני הוכחת ק.ש.ב), ולכן: $|A\cup B|=|C\cup D|$.

<u>טענה:</u>

1. $\aleph = \aleph + \aleph$. למשל: $A = (0,1)\,, B = (1,2)$ ואז: $(0,1) \subseteq A \cup B \subseteq (0,2)$ ולכן: $\aleph \leq \aleph + \aleph \leq \aleph$.
2. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
3. $\aleph_0 + n = \aleph_0$.
4. $\aleph + n = \aleph$.

<u>טענה:</u>

אלו תכונות מקיימת פעולת החיבור?

1. חילופיות: $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_2 + \kappa_1$.
2. קיבוציות: $\kappa_1 + (\kappa_2 + \kappa_3) = (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_3$.
3. איבר נייטרלי: $\kappa_1 + 0 = 0 + \kappa_1 = \kappa_1$ לכל κ_1.

<u>הסבר:</u>

תהיינה A, B, C זרות המקיימות: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2, |C| = \kappa_3$.

1. $\kappa_1 + \kappa_2 = |A \cup B| = |B \cup A| = \kappa_2 + \kappa_1$.
2. $\kappa_1 + (\kappa_2 + \kappa_3) = |A \cup (B \cup C)| = |(A \cup B) \cup C| = (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_3$.
3. $\kappa_1 + 0 = |A \cup \emptyset| = |A| = \kappa_1$.

<u>טענה:</u>

חיבור עוצמות שומר על סדר (כמו שאנחנו מצפים מחיבור...), כלומר אם $\kappa_1 \leq \kappa_2, \lambda_1 \leq \lambda_2$ אז: $\kappa_1 + \lambda_1 \leq \kappa_2 + \lambda_2$.

<u>הוכחה:</u>

תהיינה A, B, C, D קבוצות זרות המקיימות: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2, |C| =$

$\lambda_1, |D| = \lambda_2$. לפי הגדרת החיבור:

$$\kappa_1 + \lambda_1 = |A \cup C|, \quad \kappa_2 + \lambda_2 = |B \cup D|$$

ואנחנו צריכים להוכיח שקיימת: $h : A \cup C \to B \cup D$ חח"ע.

אם כן, אנחנו יודעים ש: $|A| \leq |B|, |C| \leq |D|$, ולכן קיימות: $f : A \to B, g : C \to D$ חח"ע. באמצעותן, נגדיר: $h : A \cup C \to B \cup D$ כך:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in C \end{cases}$$

מכיוון ש-A, C זרות, הפונקציה אכן מוגדרת היטב, באופן דומה לטענה קודמת היא חח"ע - נוכיח זאת.

יהיו $x_1, x_2 \in A \cup C$, $x_1 \neq x_2$, צ"ל: $h(x_1) \neq h(x_2)$. נחלק למקרים.

אם $x_1, x_2 \in A$, אז: $h(x_1) = f(x_1), h(x_2) = f(x_2)$; מכיוון ש-$f$ חח"ע, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

באופן דומה, אם $x_1, x_2 \in C$, אז: $h(x_1) = g(x_1), h(x_2) = g(x_2)$; מכיוון ש-$g$ חח"ע, $g(x_1) \neq g(x_2)$.

אם אחד מהם שייך ל-A והשני ל-C, בה"כ $x_1 \in A, x_2 \in C$, נקבל ש: $h(x_1) = f(x_1) \in B, h(x_2) = g(x_2) \in D$. מכיוון ש-$B, D$ זרות, נקבל בפרט ש: $h(x_1) \neq h(x_2)$.

<u>הערה:</u>

אפשר לשאול האם זה נכון גם לאי-שוויון חזק, כלומר האם: $\kappa_1 < \kappa_2, \lambda_1 \leq \lambda_2$ גורר ש: $\kappa_1 + \lambda_1 < \kappa_2 + \lambda_2$? זה לא נכון, למשל: $0 < 1, \aleph_0 \leq \aleph_0$ אך: $0 + \aleph_0 \not< 1 + \aleph_0$.

לעומת זאת, אם $\kappa_1 < \kappa_2, \lambda_1 < \lambda_2$ אז: $\kappa_1 + \lambda_1 < \kappa_2 + \lambda_2$.

<u>חשוב מאד!</u> אין חיסור עוצמות! אסור לרשום דברים כמו: $\aleph_0 - 1$.

<u>כפל עוצמות:</u>

תהיינה κ_1, κ_2 שתי עוצמות. איך נגדיר את $\kappa_1\kappa_2$?

במקרה הסופי, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, ולכן נכליל זאת וכך נגדיר כפל עוצמות במקרה הכללי.

כלומר, אם אנחנו רוצים לחשב את $\kappa_1\kappa_2$ ניקח שתי קבוצות A, B (לא צריך זרות, אבל ליתר ביטחון כדאי - אם זה לא קשה - לבחור זרות) המקיימות: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2$, ואז:

$$\kappa_1\kappa_2 = |A \times B|$$

למשל, נחשב את $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ (אפשר לרשום: $\aleph_0^2$). אנחנו צריכים לבחור שתי קבוצות A, B שעוצמתן היא $\aleph_0$, ולחשב את העוצמה של $A \times B$. נבחר, למשל, $A = B = \mathbb{N}$, ואז:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = |A \times B| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

ראשית, יש להסביר למה הכפל שהגדרנו אכן מוגדר היטב - להסביר שלא משנה אלו קבוצות A, B ניקח, נקבל את אותה התוצאה.

פורמלית: תהיינה A, B כך ש: $|A| = \kappa_1, |B| = \kappa_2$, ותהיינה C, D כך ש: $|C| = \kappa_1, |D| = \kappa_2$, צ"ל:

$$|A \times B| = |C \times D|$$

אם כן, $|A| = |C| = \kappa_1$, ולכן קיימת $f : A \to C$ חח"ע ועל. באופן דומה,

קיימת $g : B \to D$ חח"ע ועל. נגדיר $h : A \times B \to C \times D$ כך:

$$h\left(a,b\right) = \left(f\left(a\right), g\left(b\right)\right)$$

נראה ש־h אכן חח"ע ועל.

חח"ע - יהיו $\left(a_1,b_1\right), \left(a_2,b_2\right) \in A \times B$ כך ש: $h\left(a_1,b_1\right) = h\left(a_2,b_2\right)$, צ"ל: $\left(a_1,b_1\right) = \left(a_2,b_2\right)$. אם כן:

$$h\left(a_1,b_1\right) = h\left(a_2,b_2\right) \Longrightarrow \left(f\left(a_1\right), g\left(b_1\right)\right) = \left(f\left(a_2\right), g\left(b_2\right)\right) \Longrightarrow f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right) \wedge g\left(b_1\right) = g\left(b_2\right)$$

f,g חח"ע, ולכן: $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ ומכאן: $\left(a_1,b_1\right) = \left(a_2,b_2\right)$, כנדרש.

על - יהי $\left(c,d\right) \in C \times D$, נראה שקיים: $\left(a,b\right) \in A \times B$ שמקיים: $h\left(a,b\right) = \left(c,d\right)$. אם כן, $f : A \to C$ על ולכן קיים $a \in A$ עבורו: $f\left(a\right) = c$. כמו כן, $g : B \to D$ על ולכן קיים $b \in B$ עבורו: $g\left(b\right) = d$. לכן:

$$h\left(a,b\right) = \left(f\left(a\right), g\left(b\right)\right) = \left(c,d\right)$$

כנדרש.

<u>טענה:</u>

1. $\aleph = \aleph \cdot \aleph$. זה לא כל־כך פשוט להראות זאת בכלים שיש לנו עכשיו; $\aleph = \left|\mathbb{C}\right|$, אפשר להראות ש: $\aleph = \left|\mathbb{C}\right| = \left|\mathbb{R} \times \mathbb{R}\right| = \aleph \cdot \aleph$, עם הפונקציה: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ המוגדרת כך: $f\left(a,b\right) = a + bi$.
2. $\aleph = \aleph_0 \cdot \aleph$.
3. $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0, \aleph \cdot n = \aleph$, עבור: $n \in \mathbb{N}$.
4. $0 = \aleph \cdot 0 = \aleph_0 \cdot 0$, כי: $A \times \emptyset = \emptyset$.

<u>טענה:</u>

אלו תכונות מקיים הכפל?

1. חילופיות: $\kappa_1\kappa_2=\kappa_2\kappa_1$.
2. קיבוציות: $\kappa_1\left(\kappa_2\kappa_3\right)=\left(\kappa_1\kappa_2\right)\kappa_3$.
3. איבר נייטרלי: $\kappa_1\cdot 1=1\cdot\kappa_1=\kappa_1$.
4. $\kappa_1\cdot 0=0\cdot\kappa_1=0$.
5. פילוג: $\kappa_1\left(\kappa_2+\kappa_3\right)=\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3$.

<u>הסבר:</u>

תהיינה A,B,C זרות המקיימות: $|A|=\kappa_1,|B|=\kappa_2,|C|=\kappa_3$.

1. $\kappa_1\kappa_2=|A\times B|=|B\times A|=\kappa_2\kappa_1$; $|A\times B|=|B\times A|$ כי הפונקציה $f:A\times B\to B\times A$ המוגדרת ע"י: $f(a,b)=(b,a)$ חח"ע ועל.
2. $\left(\kappa_1\kappa_2\right)\kappa_3=|(A\times B)\times C|=|A\times(B\times C)|=\kappa_1\left(\kappa_2\kappa_3\right)$; $|A\times(B\times C)|=|(A\times B)\times C|$ כי הפונקציה $f:A\times(B\times C)\to(A\times B)\times C$ המוגדרת ע"י: $f(a,(b,c))=((a,b),c)$ היא חח"ע ועל.
3. $\kappa_1=|A|=|A\times\{0\}|=\kappa_1\cdot 1$, ראינו בהרצאה הקודמת ש: $|\{0\}\times A|=|A\times\{0\}|=|A|$.
4. $\kappa_1\cdot 0=|A\times\emptyset|=|\emptyset|=0$.
5. $\kappa_1\left(\kappa_2+\kappa_3\right)=|A\times(B\cup C)|=|(A\times B)\cup(A\times C)|=\kappa_1\kappa_2+\kappa_1\kappa_3$, כי מתקיים: $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

<u>טענה:</u>

מכפלת עוצמות שומרת על הסדר. כלומר, אם $\kappa_1\leq\kappa_2,\lambda_1\leq\lambda_2$ אז: $\kappa_1\lambda_1\leq\kappa_2\lambda_2$.

<u>הוכחה:</u>

תהיינה A,B,C,D קבוצות המקיימות: $|A|=\kappa_1, |B|=\kappa_2, |C|=\lambda_1, |D|=\lambda_2$, צריך להוכיח ש: $|A\times C|\leq|B\times D|$.

אנחנו יודעים ש: $|A|\leq|B|, |C|\leq|D|$, כלומר קיימות: $f:A\to B, g:C\to D$ חח"ע.

אם כן, נגדיר: $h:A\times C\to B\times D$ באופן הבא: $h(a,c)=(f(a),g(c))$.

h חח"ע, ולכן: $|A\times C|\leq|B\times D|$, כלומר: $\kappa_1\lambda_1\leq\kappa_2\lambda_2$.

* אם $B=\emptyset$, אז: $A=\emptyset$ כי: $0\leq|A|\leq|B|=0$. במקרה כזה, $A\times C=B\times D=\emptyset$, ובפרט: $|A\times C|\leq|B\times D|$.

* אם $D=\emptyset$, אז $C=\emptyset$ ודומה.

<u>הערה:</u>

האם אי־שויוון חזק נשמר? כלומר, אם $\kappa_1<\kappa_2, \lambda_1\leq\lambda_2$ אז בהכרח: $\kappa_1\lambda_1<\kappa_2\lambda_2$? זה לא נכון, אפשר לבחור: $\lambda_1=\lambda_2=0$. לעומת זאת, אם: $\kappa_1<\kappa_2, \lambda_1<\lambda_2$ אז: $\kappa_1\lambda_1<\kappa_2\lambda_2$.

<u>חשוב מאד!</u> אין חילוק של עוצמות! אסור לכתוב דברים כמו: $\frac{1}{2}\aleph$.

<u>חזקה של עוצמות:</u>

תהיינה κ_1,κ_2 שתי עוצמות. איך נגדיר את $\kappa_1^{\kappa_2}$?

אנחנו מסמנים: $B^A=\{f|f:A\to B\}$. במקרה הסופי, אפשר להראות ש: $\left|B^A\right|=|B|^{|A|}$. למשל:

$$A=\{1,2,3\}, B=\{4,5\}\Longrightarrow|A|=3, |B|=2$$

ונבדוק שאכן: $8 = |B|^{|A|} = \left|B^A\right|$, כלומר שיש 8 פונקציות $f : A \to B$.
אם כן:

$$f_1(x) = 4$$
$$f_2(x) = 5$$
$$f_3(1) = 4, f_3(2) = f_3(3) = 5$$
$$f_4(1) = f_4(2) = 4, f_4(3) = 5$$
$$f_5(1) = 5, f_5(2) = f_5(3) = 4$$
$$f_6(1) = f_6(2) = 5, f_6(3) = 4$$
$$f_7(1) = f_7(3) = 4, f_7(2) = 5$$
$$f_8(1) = f_8(3) = 5, f_8(2) = 4$$

לכן נכליל זאת למקרה הכללי, ונגדיר חזקה של עוצמות באופן הבא - כדי לחשב את $\kappa_1^{\kappa_2}$, נבחר קבוצות A, B שמקיימות: $|A| = \kappa_2, |B| = \kappa_1$ ואז:

$$\kappa_1^{\kappa_2} = \left|B^A\right|$$

ראשית, יש להסביר למה החזקה שהגדרנו אכן מוגדרת היטב - להסביר שלא משנה אלו קבוצות A, B ניקח, נקבל את אותה התוצאה.
פורמלית: תהיינה A, B כך ש: $|A| = \kappa_2, |B| = \kappa_1$, ותהיינה C, D כך ש: $|C| = \kappa_2, |D| = \kappa_1$, צ"ל:

$$\left|B^A\right| = \left|D^C\right|$$

אם כן, $|A| = |C| = \kappa_2$, ולכן קיימת $f : A \to C$ חח"ע ועל. באופן דומה, קיימת $g : B \to D$ חח"ע ועל.
אנחנו רוצים להגדיר פונקציה של פונקציות: $F : B^A \to D^C$ חח"ע ועל

F) מקבלת פונקציה $A \to B$ ומחזירה פונקציה $C \to D$. כלומר, אם $h : A \to B$, אנחנו רוצים ש: $F(h) : C \to D$, ואיכשהו להשתמש בf, g...)

אם כן, נגדיר $F : B^A \to D^C$ באופן הבא: $F(h) = g \circ h \circ f^{-1}$.

ראשית, אם $h : A \to B$ אז: $g \circ h \circ f^{-1} : C \to D$ ואכן: $F(h) \in D^C$, כלומר F אכן פונקציה.

נראה ש־F חח"ע; תהיינה $h_1, h_2 \in B^A$ כך ש: $F(h_1) = F(h_2)$, צ"ל: $h_1 = h_2$. אם כן:

$$F(h_1) = F(h_2) \Longrightarrow g \circ h_1 \circ f^{-1} = g \circ h_2 \circ f^{-1}$$

נרכיב את f מימין ואת g^{-1} משמאל:

$$g^{-1} \circ g \circ h_1 \circ f^{-1} \circ f = g^{-1} \circ g \circ h_2 \circ f^{-1} \circ f$$

כעת, $f^{-1} \circ f = id_A, g^{-1} \circ g = id_B$ ולכן:

$$id_B \circ h_1 \circ id_A = id_B \circ h_2 \circ id_A \Longrightarrow h_1 = h_2$$

נראה ש־F על; תהי $y \in D^C$ נראה שקיימת h עבורה: $F(h) = y$, כלומר: $g \circ h \circ f^{-1} = y$. נתבונן ב: $h = g^{-1} \circ y \circ f \in B^A$, מתקיים:

$$F(h) = g \circ h \circ f^{-1} = g \circ \left(g^{-1} \circ y \circ f\right) \circ f^{-1} = id_D \circ y \circ id_C = y$$

האמת היא, שאפשר "פשוט" להראות שהפונקציה: $G : D^C \to B^A$ המוגדרת על ידי: $G(h) = g^{-1} \circ h \circ f$ היא ההופכית של F.

בכל אופן, F חח"ע ועל, כנדרש.

<u>טענה:</u>

תהי κ עוצמה.

1. $\kappa^1 = \kappa$.
2. $1^\kappa = 1$.
3. $\kappa^0 = 1$, ובפרט: $0^0 = 1$.
4. אם $\kappa \neq 0$ אז: $0^\kappa = 0$.

<u>הוכחה:</u>

1. תהיינה: A, B קבוצות כך ש: $|A| = \kappa, |B| = 1$, כלומר: $B = \{x\}$. אנחנו צריכים להראות ש: $|A| = \left|A^B\right|$, כלומר להגדיר פונקציה חח"ע ועל: $F : A^B \to A$. איך נראית פונקציה $f \in A^B$? כל פונקציה כזו לוקחת את x לאיבר כלשהו ב־A. במילים אחרות, כל פונקציה כזו מוגדרת כך: $f(x) = a$, עבור $a \in A$; כל a והפונקציה שלו. אם כן, נוכל להגדיר את הפונקציה F באופן הבא: $F(f) = f(x)$.

   אם $\kappa = 0$, אז: $A = \emptyset$ ואז גם: $A^B = \emptyset$ (אין פונקציות $f : \{x\} \to \emptyset$), וגם במקרה זה: $\kappa^1 = \kappa$.
2. תהיינה: A, B קבוצות כך ש: $|A| = \kappa, |B| = 1$, כלומר: $B = \{x\}$. אנחנו צריכים להראות ש: $\left|B^A\right| = 1$, כלומר שיש רק פונקציה אחת $f : A \to B$. אכן, הפונקציה היחידה $f : A \to B$ היא: $f(a) = x$, לכל $a \in A$.
3. $\left|A^\emptyset\right| = \kappa^0$; בקבוצה $A^\emptyset$, כלומר קבוצת הפונקציות $f : \emptyset \to A$, יש רק פונקציה אחת: $f = \emptyset$. לכן: $\kappa^0 = \left|A^\emptyset\right| = 1$.
4. אם $\kappa \neq 0$, כלומר: $A \neq \emptyset$, לא קיימת פונקציה $f : A \to \emptyset$, ולכן: $\emptyset^A = \emptyset$, כלומר: $0^\kappa = \left|\emptyset^A\right| = |\emptyset| = 0$.

<u>משפט:</u>

לכל A, מתקיים: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

<u>הוכחה:</u>

מספיק להראות ש: $\left|\{0,1\}^A\right| = |P(A)|$, כלומר להגדיר: $F : P(A) \to \{0,1\}^A$ חח"ע ועל.