הרצאה XIX- אינפי 1

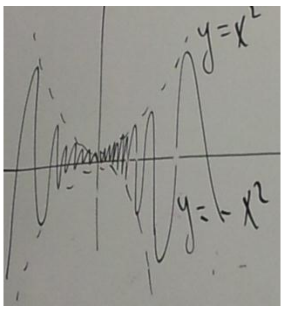
<u>רציפות של נגזרת</u>: למה של דרבו (*Darboux*)

<u>משפט</u>: $x_0 \in (a,b), f \in D(a,b)$. אם קיימות גבולות $\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = l-, \lim_{x\to x_0+0} f'(x) = l+$ אזי $f'(x_0) = l+ = l-$.

הוכחה: $\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0), \lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0+0)$ ולכן $f'(x_0+0) = f'(x_0-0) = f'(x_0)$.

לפי משפט לגרנג' $\exists c \in (x, x_0): \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ נניח ש$x < x_0$ לכן $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{c\to x_0-0} f'(c) = l_-$. כעת נניח כי $x > x_0$, ולכן $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{c\to x_0+0} f'(c) = l_+$. אבל ידוע ש$f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$. לכן $f'(x_0) = l_+ = l-$.

כלומר, אין נקודות אי רציפות מסוג ראשון ל$f'(x)$.



דוגמא: $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$. ברור כי $f'(x)$ קיימת לכל $x \neq 0$. כעת נבדוק עבור $x = 0$. על פי הגדרת הנגזרת, נחשב את הנגזרת בנקודה ונקבל $f'(0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = x\sin\frac{1}{x} \to_{x\to 0} 0$. לכן הפונקציה גזירה גם בנקודה $x = 0$. מכאן ש$f \in D(-\infty,\infty)$. נבדוק אם הנגזרת רציפה, ונראה כי לא קיים גבול ב$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. לכן לא קיים גבול, ולכן 0 נקודת אי רציפות מסוג 2.

<u>כלל לופיטל</u>: (*L'Hospital*) בעצם מי שגילה את הכלל היה בכלל ברנולי ☺ (משוויץ).

<u>משפט</u>: $p \in \bar{R}$. f,g שני פונקציות המוגדרות בסביבת $U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ כאשר $U_{\delta_0}(p) = \begin{cases} (p-\delta_0, p+\delta_0), p \in R \\ \left(\frac{1}{\delta_0}, +\infty\right), p = +\infty \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\delta_0}\right), p = -\infty \end{cases}$.

נניח ש:

1. f,g גזירות ב$U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$
2. $\forall x \in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\} : g'(x) \neq 0$
3. $\exists \lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \bar{R}$.

אזי קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = L$. בכל מקרה

א) $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x) = 0$

ב) $\lim_{x\to p} g(x) = \pm\infty$

הוכחה:

סביבה של L, (α,β). מתקיים $L \in R; (\alpha,\beta) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ או $L \in R; (\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right)$ או $L = -\infty; (\alpha,\beta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

גם מתקיים $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, לכן קיים $0<\delta<\delta_0$ כך שלכל $x\in U_{\delta_0}(p)\backslash\{p\}$ מתקיים $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$. מתקיים גם כן $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$. לכן $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. מכאן שאם ניקח $x_1,x\in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ לכן $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$: $\exists c\in(x,x_1)\vee(x_1,x)$.

ומאחר ומתקיים $c\in U_\delta(p)\backslash\{p\}$, וגם ידוע $\alpha'<\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta'$, לכן $\alpha'<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<\beta'$. מכאן ש-$g$ לא מתאפסת בסביבת p.

א) $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)$ ידוע. לכן מכאן $\alpha<\alpha'<\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}<\beta'<\beta$. מתקיימת סביבה $U_\delta(p)\backslash\{p\}$ כך שלכל x ששייך לסביבה מקיים $\frac{f(x)}{g(x)}\in(\alpha,\beta)$. לכן קיים $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ב) כאן מתקיים $\lim_{x\to p}g(x)=\pm\infty$. לכן $\alpha'\left(g(x)-g(x_1)\right)<f(x)-f(x_1)<\beta'\left(g(x)-g(x_1)\right)$. לכן אפשר להעביר אגפים ולקבל $\underbrace{\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{A}<\frac{f(x)}{g(x)}<\underbrace{\beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}}_{B}$. כמובן כל זה כאשר $x\to p$. וגם ידוע לנו ממקודם שמתקיים $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$. מכאן $\exists 0<\delta<\delta_0:\ \alpha<A\ \wedge B<\beta$. אם $x\in U_\delta(p)\backslash\{p\}$ אז $\frac{f(x)}{g(x)}\in(\alpha,\beta)$ ואז באופן דומה לסעיף קודם $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

מ.ש.ל.

תרגילים:

1. $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$. זהו המצב של כלל לופיטל, לכן נשתמש בו כדי לקבל $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos ax}a(-\sin ax)}{\frac{1}{\cos bx}b(-\sin bx)}=$ $\lim_{x\to0}\frac{\cos bx}{\cos ax}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}$.
2. $\lim_{x\to0}\frac{x\cot x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{(\sin x)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x+\cos x}{\cos x\, x^2+\sin x\, x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\sin x}{x}}{\cos x+\frac{2\sin x}{x}}=-\frac{1}{3}$
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}\ (\varepsilon>0)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}=0$
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^m}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{mx^{m-1}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{m!}=\infty$.

<u>נגזרות מסדר גבוה</u>:

תהי $f:(a,b)\to R$, $f\in D(a,b)$ ונניח שגם f' גזירה ב-(a,b) לכן $(f')'(x)=f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ ותיקרא נגזרת מסדר 2. כעת נניח שלכל $x\in(a,b)$ קיימות הנגזרות $f'(x),f''(x),f'''(x),\dots,f^{r-1}(x)$, מתקיים גם כן $\left(f^{(r-1)}\right)'(x_0)=f^{(r)}(x_0)$. ומסמנים באופן דומה: $f^{(r)}(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{df}{dx}\right)\right)\dots\right)=\frac{d^r}{dx^r}f(x)$.

דוגמא: $\sin x''=-\sin x$ וגם $\cos x''=-\cos x$, והם פתרונות המשוואה הדיפרנציאלית $y''+y=0$.

הגדרה: $D^r(a,b)=\left\{\begin{array}{c}\text{כל פונקציות}\\ \text{עם נגזרות}\\ \text{סדר } r\end{array}\right\}$.

דוגמא: $f(x) = |x|^3$. $D^0(a,b) = C(a,b), (r=0)$.

עבור *r=1* $f(x) = \begin{cases} x^3, x > 0 \\ -x^3, x < 0 \end{cases}$. לכן $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, x > 0 \\ -3x^2, x < 0 \end{cases}$ אבל עבור הערך 0 מתקיים שהערכים שווים משתי הכיוונים, לכן קיימת הנגזרת. ז"א $D^1(\infty,\infty)$.

נביט ב*r=2*. מתקיים $f''(x) = \begin{cases} 6x, x > 0 \\ -6x, x < 0 \end{cases}$ ולכן הנגזרת באפס ע"פ הגדרה גם כן קיימת, ושווה ל0.

נביט ב*r=3* ונראה שהנגזרת כבר לא קיימת, כי $f'''(x) = \begin{cases} 6, x > 0 \\ -6, x < 0 \end{cases}$ ואין להם ערך זהה מכל כיוון. לכן $|x|^3 \in \mathrm{D}^2(-\infty,\infty)$.

דוגמא: $f(x) \coloneqq \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$. **בתור תרגיל בית צריך להוכיח ש$\boldsymbol{f} \in \mathbf{D}^{\infty}(-\infty,\infty)$.**