ב"א אנליזה 2 תשעח מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int\left(e^x+x\right)^2\left(e^x+1\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int\left(e^x+x\right)^2\left(e^x+1\right)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=e^x+x\\ \mathrm{d}t=e^x+1\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int t^2\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\left(e^x+x\right)^3}{3}+C$$

(ב) $\int x^2\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc}f=x^2 & f'=2x\\ g'=\sin(2x) & g=\frac{-\cos(2x)}{2}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{-x^2\cos(2x)}{2}-\int\frac{-\cos(2x)}{2}\cdot2x\mathrm{d}x\\ &=\frac{-x^2\cos(2x)}{2}+\int x\cos(2x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ונשתמש שוב באינטגרציה בחלקים לחשב $\int x\cos(2x)\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int x\cos(2x)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc}f=x & f'=1\\ g'=\cos(2x) & g=\frac{\sin(2x)}{2}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\int\frac{\sin(2x)}{2}\mathrm{d}x\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\frac{-\cos(2x)}{4}+C\end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$\int x^2\sin\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{-x^2\cos(2x)}{2}+\int x\cos(2x)\mathrm{d}x=\frac{-x^2\cos(2x)}{2}+\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת ב $x=-1$, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{x+1}=\{\frac{1}{0}\}=\pm\infty$$

כאשר מצד ימין ∞ ומצד שמאל $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=-1$.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין:</u> נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

ולכן $y=x-1$ אסימפטוטה משופעת מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u> נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x+1}=-1$$

ולכן $y=x-1$ אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\frac{1}{x^2+\sin(x)}\mathrm{d}x$.

פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ הפונקציה לא מתאפסת כי $\sin(1)$ ואחרי 1 מתקיים ש $x^2+\sin(x)\neq 0$ בגלל ש sin חסומה ע"י 1. נראה שהאינטגרל שלנו חבר של האינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס. הפונקציות $\frac{1}{x^2+\sin(x)}$ ו $\frac{1}{x^2}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2+\sin(x)}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\sin(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sin(x)}{x^2}}=\frac{1}{1+0}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך ש $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\sin(x)=\{0\cdot\text{חסומה}\}=0$. וקיבלנו שהאינטגרלים חברים (קיבלנו מספר סופי שונה מאפס).

.3

(א) חשבו את הגבול

$$.\lim_{x\to0}\frac{x-\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^2}$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to0}\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\cos\left(t^2\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\int_{-x}^{x^2}\cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to0}\frac{1-\left[2x\cos\left(x^4\right)-(-1)\cos\left(\left(-x\right)^2\right)\right]}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\left[2x\cos\left(x^4\right)+\cos\left(x^2\right)\right]}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{2x}-\cos\left(x^4\right)=0-\cos(0)=-1$$

כאשר המעבר האחרון מסתמך על

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{2x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^2\right)}{2}=0$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n}+3k+2n}$

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k^2}{n}+3k+2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(\frac{k^2}{n^2}+3\frac{k}{n}+2\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\left(\frac{k}{n}\right)+2\right)}$$

ועבור $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2+3\left(\frac{k}{n}\right)+2\right)}\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$$

נחשב אינטגרל זה בעזרת שברים חלקיים: מתקיים ש

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

ולכן קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}$$

נמצא אותם. נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל

$$1=A(x+2)+B(x+1)$$

ונציב $x=-2$ לקבל $1=-B$ ולכן $B=-1$. נציב $x=-1$ לקבל $A=1$. לכן בסה"כ נקבל

בעזרת השלמה לריבוע (כיוון ש x^2+3x+2 אי פריק):

$$\int_0^1\frac{1}{x^2+3x+3}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+2)}\mathrm{d}x=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=(\ln 2-\ln 3)-(0-\ln 2)=2\ln 2-\ln 3$$

.4

(א) קרבו את $\sin(1)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=1$ נקבל

$$\sin(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|\le\left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right|=\frac{1}{(2k+1)!}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sin(1)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100}\le\frac{1}{(2k+1)!}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{120}=\frac{1}{5!}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3!}=\frac{5}{6}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) קרבו את $\cos(\frac{2+\pi}{2})$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: כיוון ש

$$\cos(\frac{2+\pi}{2})=\cos(1+\frac{\pi}{2})=-\sin(1)$$

נקבל ש $-\frac{5}{6}$ קירוב עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ שהרי לפי סעיף קודם,

$$\left|\cos(\frac{2+\pi}{2})-\left(-\frac{5}{6}\right)\right|=\left|-\sin(1)+\frac{5}{6}\right|=\left|\sin(1)-\frac{5}{6}\right|<\frac{1}{100}$$

5. תהיינה f,g שתי פונקציות בעלות נגזרות רציפות כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(x)>g'(x)$.

(א) הוכיחו/הפריכו: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)>g(x)$.

פתרון: הפרכה: $f(x)=2x,g(x)=x$ מקיימות כי $f'(x)=2>1=g'(x)$ אבל $f(-1)=-2<-1=g(-1)$ ולכן לא לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)>g(x)$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: מתקיים כי $f(1)-f(0)\ge g(1)-g(0)$.

פתרון: נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$ ונרצה להראות כי $h(1)-h(0)>0$ שהרי

$$h(1)-h(0)=f(1)-g(1)-[f(0)-g(0)]$$

לפי משפט לגרנז, קיימת $0<c<1$ כך ש

$$\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c)$$

כיוון ש h גזירה ורציפה. לכל x מתקיים $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ ולפי הנתון $h'(x)>0$. לכן

$$h(1)-h(0)=\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c)>0$$

כמו שרצינו.