בדידה (88195), סמטסטר קיץ תשפ"ג, מועד א' -פתרון

23.08.2023, ו' באלול התשפ"ג

מרצים: אריאל ויצמן, אלעד עטייא, דורון פרלמן, ארז שיינר.
מתרגלים: שירה גרינשטיין, רועי חסון, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, פבל שטיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (30 נק') תזכורת: ההפרש הסימטרי של קבוצות A, B מוגדר להיות:

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל קבוצה A מתקיים: $P\left(A\right)\cap P\left(P\left(A\right)\right)=\emptyset$.
הפרכה:
כל קבוצה שנבחר מהווה הפרכה, כי תמיד

$$\emptyset\in P(A)\cap P(P(A))$$

ולכן החיתוך לא ריק (יש בו לפחות איבר אחד).

(ב) לכל קבוצות A, B, C, D מתקיים: $A\Delta B=C\Delta D$ אם ורק אם $\{A,B\}=\{C,D\}$.
הפרכה:
למשל

$$A=\{1,2\},B=\{3,4\}$$

$$C=\{1,3\},D=\{2,4\}$$

נקבל

$$A\Delta B=C\Delta D=\{1,2,3,4\}$$

אך כמובן

$$\{A,B\}\neq\{C,D\}$$

כי ארבעת הקבוצות שונות זו מזו.

(ג) לכל קבוצות A, B, C מתקיים: $A\setminus B=C\setminus B$ אם ורק אם $(A\Delta C)\setminus B=\emptyset$.
הוכחה:
$\Leftarrow$: נניח $A\setminus B=C\setminus B$. נב"ש קיים $x\in(A\Delta C)\setminus B$. לכן $x\in A\Delta C$ וגם $x\notin B$. נחלק למקרים:
אם $x\in A$ זאת אומרת ש $x\notin C$, וקיבלנו $x\in A\setminus B$ וגם $x\notin C\setminus B$ (כי הוא לא בC) בסתירה לנתון.
אחרת, מכיון ש $x\in A\Delta C$ נקבל $x\in C$ ואז $x\in C\setminus B$ וגם $x\notin A\setminus B$ (כי הפעם לא בA) בסתירה לנתון.
$\Rightarrow$: נניח $(A\Delta C)\setminus B=\emptyset$, ונראה הכלה דו כיוונית: יהי $x\in A\setminus B$. אם $x\notin C$ נקבל $x\in(A\Delta C)\setminus B$ בסתירה לנתון. לכן $x\in C$ ומכיון ש $x\notin B$ נקבל $x\in C\setminus B$. הכיוון השני דומה.

2. (14 נק') לכל $1\leq n\in\mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n=\mathbb{N}\setminus\{1,\ldots,n\}$$

(א) הוכיחו שלכל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: ההפרש הסימטרי של $2n$ הקבוצות $A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_{2n}$ הוא קבוצה סופית.
(ב) הוכיחו שלכל $n\geq 1$ טבעי מתקיים: ההפרש הסימטרי של $2n-1$ הקבוצות $A_1\Delta A_2\Delta\cdots\Delta A_{2n-1}$ הוא קבוצה אינסופית.

פתרון:
א. באינדוקציה על n: עבור $n=1$ נקבל שלכל $k\geq 3$ מתקיים $k\in A_1\cap A_{2\cdot 1}$ ולכן $k\notin A_1\Delta A_2$ (זה בפועל מספיק בשביל סופיות). בנוסף, $1\notin A_1\cup A_2$ ובסה"כ $A_1\cup A_2=\{2\}$ וכמובן סופית. נניח עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n+1)}=\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2n}\right)\Delta\left(A_{2n+1}\Delta A_{2n+2}\right)$$

כעת הקבוצה $A_1\Delta\cdots\Delta A_{2n}$ סופית מהנחת האינדוקציה, והקבוצה $A_{2n+1}\Delta A_{2n+2}$ סופית כי לכל $k>2n+2$ מתקיים $k\in A_{2n+1}\cap A_{2n+2}$ ולכן $k\notin A_{2n+1}\Delta A_{2n+2}$, ולכן $A_{2n+1}\Delta A_{2n+2}\subseteq\{1,\ldots,2n+2\}$ ולכן סופית. לבסוף, הפרש סימטרי של סופיות הוא סופי.

ב. אם $n=1$ אז כמובן אינסופית. אחרת

$$A_1\Delta\cdots\Delta A_{2n-1}=\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n-1)}\right)\Delta A_{2n-1}$$

זה הפרש סימטרי של אינסופית (A_{2n-1} אינסופית, כי כל $k>2n-1$ מקיים $k\in A_{2n-1}$) עם סופית (לפי סעיף קודם). ולכן:

$$\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n-1)}\right)\Delta A_{2n-1}=\left(\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n-1)}\right)\cup A_{2n-1}\right)\setminus\left(\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n-1)}\right)\cap A_{2n-1}\right)$$

איחוד עם אינסופית הוא כמובן אינסופי ולכן $\left(\left(A_1\Delta\cdots\Delta A_{2(n-1)}\right)\cup A_{2n-1}\right)$ אינסופית. החיתוך הוא כמובן סופית, וקיבלנו אינסופית שמורידים ממנה סופית ולכן אינסופית.

3. (21 נק') תהי קבוצה A ויהי יחס סדר חלקי $\preceq$ על A. נגדיר פונקציה

$$f:A\to P(A)$$

ע"י:

$$f(a)=\{b\in A\mid a\preceq b\}$$

(א) הוכיחו כי f חח"ע.

פתרון:

יהיו $A\ni x\neq a$. נחלק למקרים:

אם $x\leq a$ אז $a\in f(a)$ ובנוסף $a\notin f(x)$ כי $a\not\preceq x$ שהרי זה יחס אנטי-סימטרי והם שונים. לכן $f(a)\neq f(x)$.

אם $x\not\leq a$ אז $x\in f(x)$ ובנוסף $x\notin f(a)$, ולכן $f(a)\neq f(x)$.

(ב) נסמן ב-X את קבוצת כל האיברים המינימליים בA, ונניח $X\neq\emptyset$. הוכיחו או הפריכו:

$$f[X]=A$$

הפרכה:

השאלה הייתה אמורה להיות:

$$\bigcup_{x\in X}f(x)=A$$

ואז ההפרכה היא ברעיון של ההפרכה שמינימלי יחיד לא גורר שהוא קטן ביותר. במקרה הזה נראה שכל דוגמה תפריך, נראה למשל עם הדוגמה $\mathbb{N}$ עם היחס $\leq$: המינימלי הוא כמובן 1 ונקבל

$$f[\{1\}]=\{f(1)\}=\{\mathbb{N}\}\neq\mathbb{N}$$

(ג) תהי $B\subseteq A$ ונניח שקיים לקבוצה B חסם עליון $s=\sup(B)$. הוכיחו:

$$f(s)=\bigcap_{b\in B}f(b)$$

פתרון:

ראשית, $x\in A$ הוא חסם מלעיל של B אם ורק אם $x\in\bigcap_{b\in B}f(b)$: אם x חסם מלעיל של B אז לכל $b\in B$ מתקיים $b\preceq x$ ולכן $x\in f(b)$ ולכן גם בחיתוך הכללי. בכיוון השני, אם הוא שייך לכולם אז מעל כל אחד ולכן חסם מלעיל.

כעת, $\supseteq$: כל חסם מלעיל של B מקיים שהוא מימין לסופרימום שהוא הקטן ביותר מביניהם.

$\subseteq$: מי שמעל הסופרימום נמצא מעל כל B ולכן חסם מלעיל.

4. (21 נק')

(א) נגדיר את A להיות קבוצת כל היחסים על הטבעיים:

$$A = \{R \mid R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

קבעו והוכיחו האם $|A|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$, או אחרת.

פתרון:

התשובה היא $\aleph$: נשים לב שבעצם $A = P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ שהרי כל יחס הוא תת-קבוצה של המכפלה, ואנחנו שואלים על קבוצת היחסים, שזה קבוצת כל תתי-הקבוצות של המכפלה, שזה בדיוק קבוצת החזקה. לכן:

$$|A| = 2^{|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

(ב) נגדיר את B להיות קבוצת כל הפונקציות ההפיכות מהטבעיים לעצמם:

$$B = \left\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \text{הפיכה } f\right\}$$

הוכיחו: $|B| = \aleph$.

פתרון:

ראשית מההגדרה נקבל

$$B \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

ולכן:

$$|B| \leq \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$$

מצד שני נגדיר $\varphi : \{0,1\}^{2\mathbb{N}} \to B$ ע"י $\varphi(f) = g_f$ כאשר $g_f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת באופן הבא:

$$g_f(n) = \begin{cases} 2k-1 & n = 2k \wedge f(2k) = 0 \\ 2k & n = 2k \wedge f(2k) = 1 \\ 2k & n = 2k-1 \wedge f(2k) = 0 \\ 2k-1 & n = 2k-1 \wedge f(2k) = 1 \end{cases}$$

כלומר, אם $f(2k) = 0$ אז g מחליפה בין $2k$ לבין $2k-1$, ואחרת היא משאירה אותם במקום.

ראשית, יש להוכיח ש$g_f \in B$ כלומר שהיא הפיכה. נראה שהיא ההופכית של עצמה: צריך להראות שלכל n טבעי מתקיים $g_f \circ g_f(n) = n$. נחלק למקרים:

אם $n = 2k \wedge f(2k) = 0$ נקבל:

$$g_f \circ g_f(2k) = g_f(2k-1) = 2k$$

אם $n = 2k \wedge f(2k) = 1$ נקבל:

$$g_f \circ g_f(2k) = g_f(2k) = 2k$$

אם $n = 2k-1 \wedge f(2k) = 0$ נקבל:

$$g_f \circ g_f(2k-1) = g_f(2k) = 2k-1$$

אם $n=2k-1 \wedge f(2k)=1$ נקבל:

$$g_f \circ g_f(2k-1) = g_f(2k-1) = 2k-1$$

נותר להוכיח ש φ חח"ע: אם $f \neq h \in \{0,1\}^{2\mathbb{N}}$ אז קיים k טבעי כך ש $f(2k) \neq h(2k)$, בה"כ $f(2k)=1, h(2k)=0$. לכן נקבל:

$$g_f(2k) = 2k \wedge h_f(2k) = 2k-1$$

ולכן

$$g_f \neq h_f$$

לכן נקבל:

$$\aleph = 2^{\aleph_0} = \left|\{0,1\}^{2\mathbb{N}}\right| \leq |B|$$

ובסה"כ לפי קש"ב נקבל

$$|B| = \aleph$$

(ג) נגדיר את X להיות קבוצת יחסי הסדר המלאים (לינאריים) על $\mathbb{N}$:

$$X = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{ יחס סדר מלא } R\}$$

קבעו והוכיחו האם $|X|$ היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$, או אחרת.

פתרון:

נראה ש $|X| = \aleph$: מצד אחד, מכיון ש $X \subseteq A$ (עבור A מסעיף א) נקבל $|X| \leq |A| = \aleph$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $\varphi : B \to X$ (עבור B מסעיף א) ע"י $\varphi(f) = R_f$ כאשר

$$aR_fb \iff f(a) \leq f(b)$$

כלומר, אנחנו מסדרים את הטבעיים "מחדש" לפי התמונות. מה צריך להוכיח? שלב ראשון שאכן R_f יחס סדר מלא. שלב שני שהפונקציה φ חח"ע.

רפלקסיבי: מכיון שלכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(a) \leq f(a)$ נקבל aR_fa.

טרנזיטיבי: נניח aR_fb, bR_fc נקבל $f(a) \leq f(b), f(b) \leq f(c)$ ולכן $f(a) \leq f(c)$ ולכן aR_fc.

אנטי-סימטרי: נניח aR_fb, bR_fa נקבל $f(a) \leq f(b), f(b) \leq f(a)$ ולכן $f(a) = f(b)$ ומכיון שf חח"ע (היא הפיכה הרי) נקבל $a=b$.

מלא: יהיו $a, b \in \mathbb{N}$. בגלל שקטן שווה מלא בה"כ $f(a) \leq f(b)$ ולכן aR_fb.

φ חח"ע: ראשית, נשים לב: מכיון שf הפיכה יש $f^{-1}(1)$ והוא הקטן ביותר בR_f שהרי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f\left(f^{-1}(1)\right) = 1 \leq f(n)$ ולכן לפי הגדרה R_f נקבל $f^{-1}(1)R_fn$. כעת, אם $f \neq g \in B$ אז מכיון שלכל תת-קבוצה לא ריקה של הטבעיים יש קטן ביותר נוכל לקחת:

$$m = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(n) \neq g^{-1}(n)\right\}$$

אם $m=1$ נקבל נקבל שיש קטן ביותר שונה: בR_f זה $f^{-1}(1)$ ואילו בR_g זה $g^{-1}(1)$, ובפרט זה סדר שונה. אחרת, נתבונן בקבוצה

$$Y = \mathbb{N} \setminus \left\{f^{-1}(n) \mid n < m\right\}$$

ונקבל שבקבוצה זו $f^{-1}(m)$ הקטן ביותר לפי R_f שהרי אם $a \in Y$ נקבל $f\left(f^{-1}(m)\right) = m \leq f(a)$ מכיון שלכל $n < m$ מתקיים: $a \neq f^{-1}(n)$, והיא חח"ע. בדומה, $g^{-1}(m)$ הקטן ביותר לפי R_g, ושוב אם הקטן ביותר על תת-קבוצה שונה אז יחסי הסדר שונים.

5. (20 נק') תהא קבוצה אינסופית A.

(א) הוכיחו שקיים יחס סדר מלא (לינארי) על A. אסור להשתמש בעקרון הסדר הטוב, מותר להשתמש בעקרון המקסימום של האוסדורף.

פתרון:

נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$X = \{R \mid \exists A' \subseteq A : A' \text{ יחס סדר מלא על } R \subseteq A' \times A'\}$$

כלומר, קבוצת יחסי הסדר המלאים על תת-קבוצה של A. נתבונן ביחס ההכלה על X. לפי האוסדורף קיימת שרשרת מקסימלית C. נסמן:

$$S = \bigcup_{R \in C} R$$

טענה: R יחס סדר מלא על A. הוכחה: נגדיר

$$B = \bigcup_{R \in C} A' \subseteq A$$

כאשר A' זו תת-הקבוצה עליה R מוגדר (לכל $R \in C$ יש A' משלו). נראה תחילה שS יחס סדר מלא על B, ואז נוכיח ש $A = B$.

רפלקסיבי: יהי $b \in B$, לכן יש $A' \subseteq A$ ויש $R \in C$ כך ש $b \in A'$, ומכיון שR יחס סדר נקבל bRb. מכיון ש $R \subseteq S$ נקבל bSb.

טרנזיטיבי: נניח aSb, bSc לכן יש $R_1, R_2 \in C$ כך ש aR_1b, bR_2c. C שרשרת ולכן בה"כ $R_1 \subseteq R_2$, ולכן aR_2b, ומכיון שR_2 טרנזיטיבי (הוא הרי יחס סדר) נקבל aR_2c.

אנטי-סימטרי: נניח aSb, bSa. לכן יש $R_1, R_2 \in C$ כך ש aR_1b, bR_2a. C שרשרת ולכן בה"כ $R_1 \subseteq R_2$, ולכן aR_2b, ומכיון שR_2 אנטי-סימטרי (הוא הרי יחס סדר) נקבל $a = b$.

מלא: יהיו $a, b \in B$: לכן קיימים $A_1, A_2 \subseteq A$ ויחסי סדר מלאים R_i על A_i ($i \in \{1,2\}$) כך ש $a \in A_1, b \in A_2$. בה"כ $R_1 \subseteq R_2$ ולכן $A_1 \subseteq A_2$, ולכן $a, b \in A_2$ ומכיון שR מלא נקבל $aR_2b \vee bR_2a$, ומכיון ש$S \subseteq R_2$ נקבל $aSb \vee bSa$.

$A = B$: נב"ש קיים $a \in A \setminus B$. נגדיר

$$S' = S \cup \{(b,a) | b \in B \cup \{a\}\}$$

ונקבל שS' יחס סדר מלא על $B \cup \{a\}$ המכיל ממש את S ולכן $C' = C \cup \{S'\}$ שרשרת המכילה ממש את C בסתירה למקסימליות.

(ב) הוכיחו שקיים יחס שקילות R על A כך שלכל $a \in A$ מתקיים כי $|[a]_R| = 2$.

פתרון:

מכיון שלכל A אינסופית מתקיים $|A| = |A| + |A|$ נקבל שיש פונקציה הפיכה

$$f : (A \times \{0\}) \cup (A \times \{1\}) \to A$$

ונגדיר את היחס R על A באופן הבא:

$$aRb \iff \exists x \in A \exists i, j \in \{0,1\} : f((x,i)) = a, f((x,j)) = b$$

זהו יחס שקילות:

רפלקסיבי: יהי $a \in A$, אז מכיון שf על יש $x \in A$ ו$i \in \{0,1\}$ כך ש $f((x,i)) = a$ ונוכל לבחור $j = i$.

סימטרי: פשוט להחליף בין i, j.

טרנזיטיבי: אם aRb, bRc אז יש x, i, j כך ש

$$f((x,i)) = a, f((x,j)) = b$$

ובנוסף יש y,k,l כך ש

$$f\left((y,k)\right)=b,f\left((y,l)\right)=c$$

מכיון שf חח"ע נקבל $y=x,k=j$, ולכן יש x,i,l כך ש

$$f\left((x,i)\right)=a,f\left((x,l)\right)=c$$

ולכן aRc.

מה הגודל של מחלקת שקילות? יהי $a\in A$, לכן קיימים x,i כך ש $f\left((x,i)\right)=a$ אם נסמן $f\left((x,1-i)\right)=b$, נקבל aRb וכמובן כפי שהוכחנו aRa, ואין עוד אחרים: אם aRc אז יש y,k,j כך ש

$$f\left((y,k)\right)=a,f\left((y,j)\right)=c$$

מחח"ע של f נקבל $y=x,k=i$, ואז $c\in\{a,b\}$. לכן

$$[a]_R=\{a,b\}$$

כלומר:

$$|[a]_R|=2$$